João Gaspar Moreda de Sousa Mesquita

Mestrado em Ensino de Matemática

A Utilização da Calculadora Gráfica no Estudo das Funções Trigonométricas

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Maria da Conceição Monteiro da Costa

Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro 2014

A UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA NO ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

© João Gaspar Moreda de Sousa Mesquita

Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

AGRADECIMENTOS

Ao professor António Domingos, pelas sábias orientações.

Aos colegas e alunos que de algum modo acompanharam e participaram na realização desta investigação.

E sobretudo aos meus pais, pelo incentivo no concretizar deste estudo e por estarem sempre presentes, apoiando a minha formação e realização profissional.

RESUMO

As novas tecnologias, nomeadamente a calculadora gráfica, têm um papel fundamental no ensino da Matemática. A sua utilização possibilita mudanças importantes no processo de ensino/aprendizagem. Todavia, é questionável até que ponto o uso da calculadora é perspetivado de forma a desenvolver o conhecimento e o raciocínio dos alunos. Assim, o objetivo principal desta investigação é analisar o modo como os alunos utilizam a calculadora gráfica e aferir da qualidade das suas aprendizagens, nomeadamente no conteúdo das funções trigonométricas do programa do ensino secundário de Matemática.

O estudo segue uma metodologia qualitativa, na modalidade de estudo de caso, recorrendo a uma abordagem instrumental baseada na teoria da atividade, pretendendo-se compreender as questões relacionadas com a aprendizagem dos alunos e a utilização da calculadora, ou seja, perceber como os alunos utilizam as calculadoras gráficas e, posteriormente, a partir desse uso, refletir acerca das suas aprendizagens em diferentes representações matemáticas.

São feitos estudos de caso interpretativos de tarefas realizadas por estudantes, com o intuito de compreender o uso que estes fazem da calculadora gráfica. Para tal, são usados como instrumentos de recolha de dados, a observação e a gravação de processos utilizados pelos alunos na realização de tarefas.

Para esta investigação, realizou-se uma contextualização teórica do papel das ferramentas computacionais na educação, abordando as práticas associadas ao uso da calculadora gráfica, tendo em conta as orientações metodológicas dos programas de Matemática, estudando-se a trigonometria do ponto de vista das diferentes representações e da realização de tarefas, atribuindo especial ênfase aos conteúdos programáticos do 11º ano do ensino secundário relacionados com funções trigonométricas.

Com a análise dos dados recolhidos, constata-se que existem técnicas que são comummente aceites, mas carecem de um suporte teórico que permita uma eficaz utilização dos meios tecnológicos. As resoluções que os alunos fazem das tarefas fornecidas pelos professores dependem muito de como os enunciados encaminham os processos de uso da calculadora gráfica, facilitando consequentemente a aprendizagem de uma forma mais ativa e assertiva.

Palavras-chave: Tecnologias; Calculadoras Gráficas; Educação Matemática; Secundário; Tarefas; Aprendizagem

ABSTRACT

New technologies, namely the graphic calculator have a fundamental role in the teaching of mathematics. Its use allows important changes in the teaching/learning process. However, it is questionable the extent to which the use of the calculator is perspectivated in a way to develop the knowledge and reasoning of the students. The main goal of this investigation is to analyse the way by which students use the calculator and assess the quality of their learning skills, especially in the content of trigonometric functions present in the program of the subject as taught during secondary level

The study follows a qualitative methodology using the case study technique and an instrumental approach based on the activity theory, aiming to understand the issues related to student learning with the use of calculators, understanding how students use graphic calculators and, later, based on that, think about their learning and on the appropriateness of the use of the calculator and the various representations in mathematics teaching.

Interpretative case studies are performed based on tasks made by students, with the purpose of understanding the usage that students make of graphic calculators. For that purpose, the data collection method is the observation and collection of the processes used by the students during task performance.

For this investigation a theoretical contextualization of the role of computational tools on education was conducted, approaching the practices associated to the use of the graphic calculator, taking in account the methodological orientations of the mathematics curricula, by studying trigonometry from the view point of the different representations and task performance, giving a special emphasis to the contents of 11th form curricula related to trigonometric functions. By analysing the collected data one can verify that there are techniques commonly accepted which lack a theoretical background which allows an effective use of technological tools. The solutions that students present to the tasks given by teachers depend in a great deal on how the given problem guides the processes of usage of the graphic calculator, thus facilitating a more assertive way of learning.

Keywords: Technologies; Graphic calculators; Mathematics teaching; Secondary Education; Tasks; Learning

ÍNDICE DE MATÉRIAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

1.1. Relevância do estudo

A evolução das tecnologias digitais é evidente na sociedade atual. A relação do homem com a máquina cresce num ritmo impetuoso a cada dia. Estando presente nos diversos setores sociais, é portanto um processo natural a sua integração também no contexto do ensino, nomeadamente na sala de aula. Nas últimas décadas, um novo tipo de artefactos tornaram-se imprescindíveis: as ferramentas de tecnologias de informação e de comunicação. É trivial dizer que estas ferramentas têm poder e mudaram a maneira de pensar humana. O seu uso em escolas tem, por um lado, encorajado os educadores a reconsiderar currículos e, por outro lado, chamado a atenção para as relações entre os alunos e os computadores (Mariotti, 2008). Desde os anos 80 que o investimento em novos equipamentos tecnológicos nas escolas tem vindo a crescer. Assim, criaram-se condições para o surgimento de novos ambientes de aprendizagem, que são aqui evidenciados pela introdução da calculadora no ensino da Matemática.

A recomendação feita nas orientações do programa do ensino secundário de Matemática, no ano letivo de 1995/96 para a utilização da calculadora gráfica, proporcionou a abertura para o uso generalizado desta ferramenta no ensino. No entanto, foram encontradas algumas resistências por parte da classe docente, pois a inclusão de atividades que contemplassem o uso de calculadora gráfica na disciplina de Matemática no ensino secundário surge nos manuais escolares em finais dos anos 90, mas a forma como eram utilizadas dependia muito da interpretação que cada um fazia do programa em vigor. Guin (2005) refere mesmo que a integração das novas tecnologias nas aulas de Matemática é mínima e pouco evoluiu.

Alguns autores debruçaram-se sobre o tema e para Guzman (1993), a educação como um sistema complexo, apresenta uma forte resistência à mudança. Contudo, tal facto não é necessariamente pejorativo, pois uma razoável resistência perante as variações é uma característica dos organismos vivos sãos. O problema é quando isto não se conjuga com a capacidade de adaptação perante a mudança que hoje em dia é cada vez mais acentuada e volátil. Da experiência profissional e da análise de estudos de investigação, chega-se à conclusão que de facto, o nível de aprendizagem da Matemática pouco terá mudado. A prática profissional quotidiana vai construindo conhecimento e melhorando a efetiva utilização das calculadoras. Todavia, este conhecimento parece nem sempre ser suficientemente fundamentado e sistematizado. Muitas vezes, os professores utilizam as calculadoras gráficas sem uma significativa mudança de objetivos. As calculadoras devem ser vistas como ferramentas de ensino que se encontram à disposição dos alunos, e como tal, é importante que professores e alunos conheçam as suas funcionalidades e as saibam usar. Devidamente utilizada, a calculadora poderá gerar entusiasmo e melhorar o processo de ensino/aprendizagem. Justifica-se, pois, que se aprofunde os conhecimentos tanto do ponto de vista teórico como metodológico para saber de que forma o recurso à calculadora pode melhorar a prática letiva. Rocha (2002) alertava ainda para uma atitude simplista no uso da calculadora, que pode conduzir a mais aspetos negativos do que positivos. Competirá ao professor auxiliar o aluno a operar corretamente com a calculadora. No entanto, há professores que mostram desagrado pela sua utilização e veem o tempo empregue a ensinar o aluno a utilizar a máquina como desperdício. Contudo, utilizar a máquina adequadamente envolve muito mais conhecimentos matemáticos do que pode parecer à primeira vista (Rocha, 2002).

Os problemas de maior relevância que os alunos encaram ao tentar analisar a informação disponibilizada pela máquina centram-se na dificuldade de consolidar a informação obtida por processos algébricos com a informação obtida a partir da calculadora. Ensinam-se os alunos a fazer cálculos simples e não há o devido cuidado em analisar as representações gráficas. Muitas vezes, resolvem-se problemas de forma mecânica sem questionar a análise que os alunos fazem da leitura da máquina e sem confirmar as transcrições dos seus raciocínios para suporte papel.

Saraiva e Teixeira (2009) afirmam que alguns dos obstáculos que os alunos enfrentam quando tentam assimilar determinados conceitos consistem em conseguir relacionar o conjunto de símbolos com os ditos conceitos. Referem ainda que o interesse dos alunos é estimulado pelas tarefas matemáticas selecionadas pelo professor e pelas situações e contextos que ele promove na aula, nomeadamente o de resolução de problemas e o de tarefas de exploração e investigativas. Desta forma, a resolução de tarefas matemáticas pode fomentar nos alunos o aperfeiçoamento do seu próprio pensamento algébrico, da sua aptidão para interpretar os símbolos matemáticos e as relações existentes entre eles. É essencial assimilar e examinar as estratégias utilizadas pelos alunos no uso das diversas representações utilizadas na resolução de tarefas, a fim de conhecer melhor as conexões feitas pelos alunos entre as diversas representações consideradas e de identificar e compreender as suas dificuldades neste processo.

O estudo da trigonometria permite utilizar vários tipos de representações de forma encadeada e interligada. É de toda a pertinência entender onde estas características de diferentes tipos de representação se encaixam no âmbito da resolução de tarefas envolvendo a trigonometria.

Apesar do uso da calculadora gráfica não ser recente, o trabalho de investigação sobre o mesmo não parece ser muito vasto. Durante muito tempo, na Europa, com variados e diferentes sistemas de educação, a investigação tem sido realizada em pequenas equipas que trabalham de forma independente, com múltiplas tendências de investigação, ligadas e relacionadas a múltiplos conceitos. Esta falta de unidade, faz com que não sejam devidamente valorizados e reconhecidos os resultados obtidos e, consequentemente, parece ter tido uma contribuição negativa para o desenvolvimento do conhecimento nesta área. Basicamente, existem relatórios sobre como estas ferramentas foram adotadas. Contudo, mesmo há mais de uma década, Waits e Demana (2000), inferem a partir de estudos realizados em que estudantes que utilizaram a calculadora gráfica desempenharam e induziram melhores níveis de consciência metacognitiva com menos esforços mentais, mais investimento na aprendizagem e um aumento na eficiência instrumental. Estes autores evidenciam o impacto pedagógico do uso da calculadora gráfica como ferramenta no ensino e aprendizagem da Matemática e consideram ainda que o ambiente de aprendizagem deve ser ativo e dinâmico, e o pensamento dos alunos deve estar voltado para a exploração e aplicação do que aprenderam. Afirmam, portanto, que a calculadora tem vindo a ganhar aceitação generalizada como uma poderosa ferramenta para a aprendizagem da Matemática, ajudando assim a melhorar o desempenho dos alunos. Como dizem Angeli e Valanides (2009), a questão já não é se esta tecnologia deve ser integrada no ensino, mas como é que essa integração deve ocorrer. A tecnologia permite o envolvimento dos alunos em situações reais, trabalhando com dados concretos e sem que o peso dos cálculos torne o trabalho incomportável. O trabalho mais experimental e exploratório terá reflexos não só na compreensão, mas também na profundidade com que os alunos passariam a dominar os conceitos. As atividades de investigação e a resolução de problemas assumem no programa de Matemática um papel importante. É referido que a dimensão gráfica só é atingida quando os estudantes trabalham com uma grande variedade de gráficos com apoio da tecnologia adequada e que esta só poderá ser atingida se os alunos tirarem melhor partido dos recursos, que não terminam no manual adotado, na calculadora ou nos computadores, mas que passam por um conjunto de tarefas propostas pelo professor e por diferentes formas de organização do trabalho. A calculadora gráfica permite ainda trabalhar em simultâneo com diferentes representações, articulando o numérico, o gráfico e o analítico, na construção de um conhecimento global que se apoia em cada uma destas representações para construir a compreensão sobre aspetos que o recurso apenas a determinada representação não permitiria (Rocha, 2011).

No presente estudo, pretende-se identificar e compreender, também, as dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem das funções trigonométricas. As funções encontram-se com frequência ao longo do currículo escolar, inclusive no que diz respeito à Geometria e, em particular, à Trigonometria. Apesar da sua importância, os alunos, de um modo geral, apresentam muitas dificuldades no seu estudo. Em parte, essas dificuldades relacionam-se com a necessidade de utilizar múltiplas representações. Duval (2006) afirma que o estabelecimento de relações entre as várias representações de uma função é um aspeto importante a considerar-se no processo de ensino e aprendizagem, de forma a promover o desenvolvimento de diversos tipos de conexões e, consequentemente, a compreensão dos conceitos. Pode aqui, a calculadora gráfica ter um papel primordial. É importante refletir sobre o porquê das dificuldades que os alunos apresentam ao trabalhar com funções trigonométricas, verificar a forma como lidam com as diferentes representações de funções e identificar as dificuldades na interpretação dos dados fornecidos pela calculadora, onde frequentemente acresce o problema de os alunos terem dificuldade em perceber quando devem utilizar o modo graus ou radianos. A calculadora pode ajudar a entender o raciocínio do aluno, as suas dificuldades e compreensões, além de ser uma ferramenta poderosa na elaboração e resolução de tarefas. O aluno deverá ser capaz de resolver e formular problemas, mas também de analisar diferentes estratégias e efeitos de alterações no enunciado de um problema. Desta forma, as tarefas direcionadas para compreender o efetivo uso da calculadora gráfica podem ter um papel primordial. É importante refletir sobre o porquê das dificuldades que os alunos apresentam ao trabalhar com funções e em concreto com as funções trigonométricas.

Uma das motivações para a realização deste estudo, prende-se com o facto de existirem hoje em dia, calculadoras gráficas com potencialidades que permitem ajudar os professores a compreender o efetivo uso que os alunos dão à calculadora para assim poderem perceber quais os procedimentos dos alunos com a máquina, analisar as suas dificuldades e melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. Posto isto, parece-me pertinente desenvolver uma investigação sobre a aprendizagem das funções trigonométricas do ponto de vista da resolução de tarefas e da utilização das calculadoras gráficas.

1.2. Objetivos e Questões de Investigação

Atualmente os alunos utilizam calculadoras que podem permitir uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e consequentemente melhorar a sua atitude em relação à Matemática, tornando-se assim pertinente, fazer um estudo para compreender a forma como os alunos integram a calculadora gráfica nas suas representações, nomeadamente na resolução de tarefas envolvendo funções trigonométricas. Esta investigação visa observar o raciocínio dos alunos quando usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas, e verificar como esta pode ajudar a uma melhor compreensão dos conceitos inerentes a cada tarefa. Pretende-se contribuir para a compreensão de como os alunos utilizam a calculadora, mas também refletir sobre as formas de melhorar as suas aprendizagens. Procura-se assim dar resposta às seguintes questões: O uso da calculadora é perspetivado de forma a desenvolver o conhecimento e raciocínio dos alunos? Que processos os alunos utilizam na resolução de tarefas relacionadas com funções trigonométricas? Como é que o processo de génese instrumental interfere no conhecimento e raciocínio dos alunos? Como utilizam os alunos as diferentes representações na resolução de tarefas? Qual o papel da calculadora gráfica na compreensão dos conceitos estudados?

1.3. Organização da dissertação

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. O primeiro, onde se descreve a relevância, os objetivos, as questões e a organização desta investigação. Segue-se o capítulo dois, que contém uma revisão da literatura sobre os temas considerados relevantes para este estudo. No capítulo três, descreve-se a metodologia utilizada, como sendo de natureza qualitativa, recorrendo-se a estudos de caso, a técnicas de recolha de dados, ao contexto do estudo e à apresentação dos alunos participantes. No capítulo quatro, procede-se à análise dos dados recolhidos, realizando-se a uma descrição pormenorizada do desempenho dos alunos na realização das tarefas propostas. Por fim, no capítulo cinco, apresentam-se as conclusões do estudo relativamente ao desempenho dos alunos na resolução das tarefas e quanto às considerações finais relativas ao uso geral da calculadora gráfica e das diferentes representações na matemática e em particular na trigonometria.

2. Revisão da Literatura

2.1. A calculadora gráfica como ferramenta no ensino e na aprendizagem da Matemática

A educação tem, impreterivelmente, que se adaptar às necessidades das sociedades e às grandes transformações sociais, culturais e económicas criadas pelo aparecimento das novas tecnologias. Assim, a adaptação é fundamental e iminente. Não se trata somente de inserir as tecnologias na educação. Existe todo um caminho a progredir-se para que as novas tecnologias sejam um benefício, adaptando a tecnologia ao ensino. Neste estudo, tratar-se-á, partindo de uma abordagem pela perspetiva vygotskiana, a inserção da calculadora no ensino e na aprendizagem da matemática a nível global, convergindo o foco posteriormente para a integração da calculadora gráfica no currículo português, dando a conhecer cronologicamente como foi inserida a calculadora no ensino em Portugal. Por fim, enunciar-se-á algumas limitações do uso da calculadora e serão apresentados estudos já realizados neste campo e os seus principais resultados.

2.1.1 A Perspetiva Vygotskiana

A tecnologia em sua epistemologia tem um significado muito mais global do que é atribuído atualmente. Para Kenski (2007) podemos entender a palavra relacionando-a a um conjunto de conhecimentos e razões em torno de um ofício com o objetivo de satisfazer as necessidades humanas. Kenski abrange o conceito de tecnologia ao conjunto de conhecimento e princípios científicos que se aplicam ao planear, à construção e à utilização de um equipamento num determinado tipo de atividade. Ou seja, como tecnologia pode até ser entendido tudo o que é criado para facilitar as atividades humanas. Quase tudo possui algum tipo de tecnologia. Em rigor, talvez nos devêssemos referir às recentes tecnologias usadas em sala de aula como novas tecnologias, englobando assim as tecnologias eletrónicas, digitais ou computacionais. Esta introdução pode ser pertinente para a compreensão e contextualização histórica da teoria na qual, em parte, é baseada esta pesquisa. Tendo em conta o caráter marcadamente instrumental deste trabalho, devido a centrar-se na calculadora, é importante ter uma base teórica com linhas orientadoras que ajudem a entender a utilização desta ferramenta na aprendizagem. Este trabalho vai ser analisado através da teoria da atividade que tem por base os estudos de Vygotsky (1896 - 1934). Não se trata de uma teoria recente, mas com as tecnologias está a ser retomada com novos pontos de vista. Os trabalhos iniciais de Vygotsky apontam para uma compreensão do papel do instrumento com vista ao desenvolvimento da criança, muito embora muitas das suas ideias e conceitos possam também ser pensadas no campo da formação docente.

Uma das teses principais do trabalho deste autor, para se compreender a noção de desenvolvimento do sujeito, é o caráter social e histórico dos chamados processos psicológicos superiores, como a atenção, a memória, a vontade e a escrita, entre outras. O conhecimento, nessa perspetiva, não é programado por uma herança genética, mas adquirido no contato da criança com o meio social (Vygotsky, 1982). O desenvolvimento destes processos depende essencialmente do processo de mediação pelo qual o indivíduo interage e se desenvolve no meio sociocultural em que está inserido (Mariotti, 2008). Pela relevância deste conceito no presente estudo é necessário esclarecer o que se poderá entender por mediação.

A mediação, segundo Oliveira (1993) uma das estudiosas de Vygotsky, pode ser compreendida como o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. Esses elementos intermediários são ocupados pelos instrumentos materiais e pelos instrumentos simbólicos como a linguagem, a escrita, as obras de arte, os esquemas, os vários sistemas de cálculo, etc.. Nessa perspetiva, portanto, a atividade do indivíduo sobre o objeto não é direta, mas é uma atividade mediada e tripolar. A ideia de mediação em relação às tecnologias está amplamente presente na literatura atual em educação matemática. A partir da alegação de que é necessário superar a dicotomia entre os seres humanos e as tecnologias, a unidade entre o homem e os media passa a ser o objetivo básico: a ferramenta torna-se transparente (Meira, 1998 citado por Mariotti, 2008).

Em relação aos instrumentos, como elementos mediadores do sujeito com o seu objeto, Vygotsky procurou compreender as características humanas no que concerne ao seu uso, por meio da análise do surgimento do trabalho. Nesse contexto, o instrumento é aquilo que se encontra entre o trabalhador e o seu objeto, com o intuito de melhorar e ampliar o próprio trabalho. Em termos práticos, se o homem precisar de cavar um buraco, a ferramenta é o meio que lhe permitirá alcançar o seu objetivo de cavar um buraco.

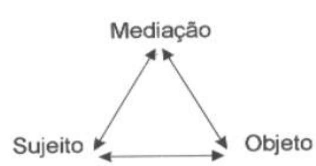


Figura 2.1 - Esquema representativo da mediação entre o sujeito e objeto

Na perspetiva da atividade instrumental vygotskiana, os instrumentos (sejam eles físicos ou linguísticos) não são meros representantes da evolução que o homem passou ao longo dos tempos. Leontiev (1903 - 1979), discípulo de Vygotsky, considera-os a verdadeira fonte do desenvolvimento humano, isto é, os processos sociais e psicológicos do indivíduo formam-se por meio de instrumentos. Contudo, Vygotsky diferencia o instrumento, que pode gerar o desenvolvimento do mero artefacto, o qual fica restrito ao uso prático do instrumento (e não ao conhecimento das suas propriedades mais internas).

Se focarmos o instrumento na sequência didática como um dos disponíveis no campo da formação para o trabalho com os géneros textuais na sala de aula, podemos ter duas situações diferentes: a primeira, onde os professores em formação interiorizam as características internas do instrumento e as operações necessárias ao seu uso, e a segunda, onde esse instrumento é utilizado sem que os alunos se tenham apropriado das suas bases internas. Neste último caso, mobilizam apenas o artefacto. Se os instrumentos físicos potenciam as ações do aluno e do professor para o seu objetivo externo, então agem como reguladores da atividade psicológica, tal como um instrumento material de trabalho e auxiliam o desenvolvimento do conteúdo da atividade mental.

A Teoria de Vygotsky é desenvolvida por outros seguidores, como Engeström (1999), para quem o foco está voltado para os sistemas de atividades coletivas. Isto é, o sujeito e o objeto fazem parte central deste sistema de atividade, mas as suas interações são influenciadas pela comunidade, regras, divisão do trabalho e ferramentas. Uma vez que se trata de uma teoria abrangente, vai-se explicitar o seu uso específico neste estudo, fazendo-se uma identificação dos elementos do sistema de atividade.

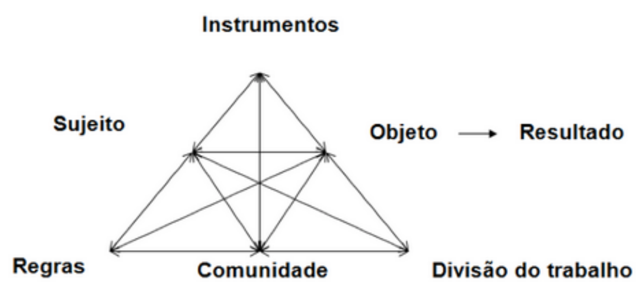


Figura 2.2 - Sistema representativo da atividade humana

No contexto da aprendizagem mediada pela tecnologia, teremos como sujeito, os alunos e como objeto, os conteúdos curriculares. Pretendendo-se como resultados, a compreensão dos conteúdos. Assim, a comunidade será formada pelo pessoal docente e discente do meio escolar e as regras serão as regras de funcionamento das aulas e as normas sociomatemáticas. A divisão de trabalho consiste na distribuição das tarefas segundo critérios definidos nas regras.

De primordial importância neste estudo, são os instrumentos, neste caso, os recursos em suporte papel e digital e sobretudo as calculadoras.

A ideia de artefacto é muito geral e abrange vários tipos de objetos produzidos pelos seres humanos através dos tempos: sons e gestos e utensílios; formas de linguagem natural orais e escritas; textos e livros, instrumentos musicais; instrumentos científicos; ferramentas de tecnologias de informação e comunicação. A contribuição de artefactos para a educação não é novidade; os livros são os principais artefactos utilizados nas escolas, mas não vamos esquecer o papel e lápis e o quadro negro (Mariotti, 2008).

Na perspetiva Ergonômica, o trabalho do professor é entendido como atividade de transformação de um objeto com suas ferramentas. A sua atividade consiste em dar conta de toda a complexidade de condutas e de situações de trabalho envolvidas nesse género de atividade. Amigues (2004) corrobora esta ideia, afirmando que a atividade do professor é mediada por objetos ou ferramentas que auxiliam o seu agir; ferramentas que auxiliam o professor tanto na transposição didática, como na reconfiguração de sua prática, desde as mais físicas (como o quadro-negro, o livro didático) até às discursivas (as várias formas de interação presentes na sala de aula). A calculadora enquanto ferramenta é algo que o professor tem em mãos para poder gerar esse desenvolvimento, para criar e promover situações de aprendizagem.

Schneuwly (2004) destaca que o instrumento é fator de desenvolvimento das capacidades humanas. Ao colocar-se entre o sujeito e a situação, o instrumento adquire a função de mediador. Porém, o instrumento, para se tornar mediador, para se transformar mediador da atividade, precisa ser apropriado pelo sujeito; ele não é eficaz senão à medida que se constroem, por parte do sujeito, os esquemas de sua utilização.

Já Wirthner (2004) compreende que as ferramentas didáticas definem, em grande parte, o ensino, pela maneira como se propõe a abordar, apresentar ou recortar o objeto a ser ensinado e, nesse sentido, elas também influenciam as conceções daqueles que a empregam e são igualmente influenciadas por elas. Para a autora, as ferramentas de ensino devem dar conta do objeto como um objeto social, cultural, portador de múltiplos significados e de usos para auxiliar os alunos no processo de aprendizagem.

2.1.2. A Génese Instrumental

Rabardel (1995) considera que uma ferramenta pode alterar-se da sua natureza original, dependendo do uso que o sujeito faz dela e propõe um modelo em que o instrumento é um terceiro pólo entre o sujeito e o objeto. No caso desta investigação, o instrumento é facilmente identificado como a calculadora gráfica. Para este autor, o artefacto é o material que sustenta a atividade humana na realização de uma tarefa. Um sujeito, a partir de um artefacto, constrói um instrumento com o fim de realizar um tipo de tarefa. Ao atribuir uma função a um artefacto, o sujeito cria um esquema mental de como vai usar e adaptar este artefacto. Note-se que, por exemplo, um software pode ser um artefacto. A noção de instrumento consiste do artefacto acrescido de esquemas de utilização. Rabardel explana o que considera ser a génese instrumental da atividade, defendendo que o sujeito se apropria do artefacto e desenvolve esquemas mentais cujo processo tem duas componentes: instrumentalização e instrumentação.

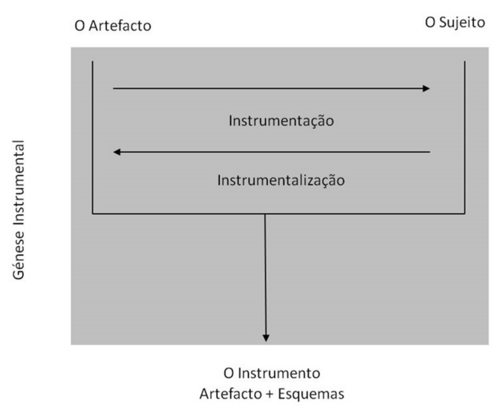


Figura 2.3 - Esquema representativo da génese instrumental

Desta forma, o artefacto passa a ser visto como instrumento, na medida em que guia a ação do sujeito para um determinado objetivo, gera nesse mesmo sujeito a apropriação das suas propriedades internas, daí ser fonte de desenvolvimento de capacidades e conhecimentos.

Nas últimas décadas, um novo tipo de artefacto tornou-se imprescindível: as ferramentas de tecnologias de informação e de comunicação, que no presente estudo é a calculadora gráfica.

Rabardel (1995) considera que a ferramenta pode alterar-se da sua natureza original, dependendo do uso que o sujeito faz dela. A abordagem instrumental do autor é baseada na diferenciação entre artefacto e instrumento. Ou seja, o artefacto é o objeto material ou simbólico por si; por vezes apenas uma parte de um artefacto complexo pode estar em foco e ser concebido de acordo com um determinado objetivo, e, por essa razão, incorpora um conhecimento específico e define o instrumento como uma entidade mista composta por componentes do próprio artefacto e componentes esquemáticos que chamamos de esquemas de utilização. Esta entidade mista nasce tanto do sujeito como do objeto. Para ele, é esta entidade que constitui o instrumento que tem um valor funcional para o sujeito. Os esquemas de utilização são progressivamente elaborados no uso do artefacto na relação com a realização de uma tarefa específica; assim, o instrumento é uma construção de um indivíduo, que tem um caráter psicológico e está estritamente relacionado com o contexto dentro do qual se origina e o seu desenvolvimento ocorre. A elaboração e a evolução de instrumentos é um processo longo e complexo que Rabardel denominou por Génese Instrumental (Rabardel, 1995).

A génese instrumental pode ser articulada em dois processos: o primeiro processo, a instrumentalização, que diz respeito à emergência e à evolução das diferentes componentes do artefacto, por exemplo, o reconhecimento progressivo das suas potencialidades e restrições. No processo de instrumentalização, relativo ao artefacto, o sujeito seleciona e produz funções, atribuindo propriedades aos artefactos. E o segundo processo, designado de instrumentação, diz respeito ao surgimento e desenvolvimento dos esquemas de utilização. No processo de instrumentação, relativamente ao sujeito, este cria, produz, modifica e atualiza os esquemas de utilização dos artefactos e de ações instrumentadas. Neste processo, o sujeito conhece, ou busca informações ligadas diretamente ao artefacto, pensando apenas no artefacto em si. Os esquemas de utilização podem ou não ser consistentes com os objetivos pragmáticos para o qual o artefacto foi concebido, basicamente, eles estão relacionados com a experiência fenomenológica do utilizador e de acordo com esta experiência, eles podem ser modificados ou integrados. Ambos os processos são orientados para fora e para dentro, respetivamente a partir do sujeito ao artefacto e vice-versa, e constituem as duas partes inseparáveis da génese instrumental.

A mediação é um termo muito comum na literatura educacional. O termo é frequentemente usado referindo-se à potencialidade de promover a relação entre alunos e o conhecimento matemático, podendo estar relacionado com a realização de uma tarefa. A ideia de mediação em relação às tecnologias está bastante presente na educação matemática. A partir da alegação de que é necessário superar a dicotomia entre os seres humanos e as tecnologias, a unidade entre o homem e os media passa a ser um objetivo básico (Mariotti, 2008).

Do ponto de vista deste trabalho, a teoria encaminha o estudo para a forma como os professores se apropriam do software para uso em prática pedagógica. Partindo da ideia que a apropriação de um artefacto se dá através da instrumentação e instrumentalização, o professor enquanto agente ativo da utilização da calculadora, tem um papel fundamental em todo este processo.

O professor desempenha vários papéis fundamentais num ambiente de ensino tecnológico. Por isso, deverá fazer uma análise diagnóstica de quando e como a tecnologia deverá ser utilizada. Deverá ter a oportunidade de observar os alunos e concentrar-se nos seus raciocínios enquanto estes trabalham com calculadoras na sala de aula. Alguns investigadores como Guillé (1994) não eram completamente a favor da utilização da tecnologia na sala de aula, mostrando-se preocupados com o facto de os alunos poderem perder as suas capacidades para efetuar cálculo mental. Contudo, a sua opinião não é completamente contra a utilização da calculadora pois colocava a hipótese desta poder contribuir para o desenvolvimento do cálculo mental. Este autor sublinhou a importância das diferenças individuais entre as crianças e do papel da atividade por elas iniciada, em contraste com a aprendizagem de caráter mecanizado. Refere ainda que a educação deveria desenvolver com a máxima individualidade o talento que quase todo o ser humano possui naturalmente.

2.1.3. As Representações Semióticas

Os registos de representação na aprendizagem da matemática são extremamente importantes. A partir dos estudos de Duval (1993), a questão do papel dos registos de representação semiótica para a aprendizagem matemática tem sido foco de pesquisas em educação matemática. Contudo, isso leva-nos a refletir sobre de que forma a ideia de representação, nomeadamente a ideia de representação semiótica, se tornou o modelo para obtenção do conhecimento. Esta reflexão é importante, uma vez que desencadeia considerações profundas, nomeadamente, na formação de professores de matemática, nas teorias de aprendizagem que se praticam e na própria constituição dos saberes que se ensinam em matemática.

Segundo Santaella (1999), pode-se dizer que sendo a Semiótica uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenómenos em seu significado e sentido, infiltra-se nos estudos e pesquisas sobre as diversas ciências, contudo não com o objetivo de se apoderar do saber e da investigação específica de outras ciências, mas de desvendar a sua existência enquanto linguagem.

Duval (2003), na sua teoria de representação semiótica, considera que as representações fazem um intercâmbio comunicativo entre o sujeito e a atividade cognitiva do pensamento, originando distintas formas de registo de representação. Assim, ele frisa que é impossível compreender os fenómenos associados ao conhecimento sem recorrer à noção de representação, pois o conhecimento só poderá ser estimulado através de uma representação. Consideram-se indispensáveis para o funcionamento cognitivo e apreensão do objeto matemático, o uso de no mínimo dois registos de representação semiótica, preferencialmente em diferentes sistemas semióticos e salienta-se que os conceitos somente serão assimilados quando o sujeito utilizar a conversão das diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático. Para Duval (1996), os problemas que são inerentes à aprendizagem da matemática têm como principais motivos a diversidade de registos de representação semiótica. Assim numa primeira fase, cabe ao professor a função de explicitar o objeto matemático que será ensinado, quais os registos de representação semiótica inerentes à atividade exposta e trabalhar as representações de transformação semiótica.

É também importante estudar as conexões que os alunos estabelecem entre as diversas representações quando resolvem as tarefas usando a calculadora gráfica, mediada pelo professor. Saraiva e Teixeira (2009) referem que a resolução de tarefas matemáticas daquela natureza pode promover nos alunos o desenvolvimento do seu próprio pensamento algébrico, da sua capacidade de interpretar e de manipular os símbolos matemáticos e as relações existentes entre eles, bem como desenvolver a sua capacidade em lidar com as estruturas algébricas, representando e raciocinando de uma forma progressivamente mais abstrata.

Alguns autores, como Goldin e Shteingold (2001) diferenciam ainda sistemas de representação estáticos e dinâmicos. Segundo estes autores, os sistemas de representação estáticos fornecem regras para a criação de fórmulas, equações, gráficos ou diagramas fixos. Contrariamente aos sistemas dinâmicos, ou seja, as novas tecnologias, que oferecem possibilidades ativas e constituem sistemas onde as representações podem mudar abruptamente, apenas com um toque num rato. Goldin e Shteingold (2001) destacam a importância da interação entre as diferentes representações, associando as dificuldades reveladas pelos alunos ao fraco desenvolvimento desta interação. Dizem que o pensamento matemático implica compreensão das relações entre as várias representações do mesmo conceito, bem como as semelhanças e diferenças estruturais entre sistemas de representação.

Friedlander e Tabach (2001) salientam a utilidade de experiências matemáticas oferecidas pelo uso de representações verbais, numéricas, gráficas e algébricas. Estes autores expõem os prós e os contras associados a cada uma das representações: a representação verbal, normalmente usada na colocação do problema e na interpretação final dos resultados obtidos, enfatiza a conexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, e entre a Matemática e o quotidiano. Todavia, a sua utilização pode ser ambígua ou conduzir a associações incorretas, e para além disso, este tipo de representação não é universal, dependendo do estilo pessoal e podendo tornar-se um obstáculo na comunicação matemática. Quanto à representação numérica, sendo importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, tem a desvantagem de não ser generalizável. A representação gráfica, segundo os autores, é intuitiva e apelativa, pois facilita o acesso a uma abordagem visual. No entanto, é muito dominada por fatores externos (tais como a escala), e expõe com frequência apenas uma parte do domínio do problema. E, por fim, quanto à representação algébrica, consideram-na geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, sendo por vezes, a forma exclusiva de fundamentar afirmações gerais. Porém, o uso unicamente de símbolos algébricos pode omitir o sentido matemático ou a natureza do objeto representado e causar obstáculos na interpretação dos resultados. Com base nas considerações expostas, estes autores sustentam o trabalho num ambiente de múltiplas representações, no qual as desvantagens de cada uma podem ser suprimidas através da utilização combinada das várias representações. É pertinente referir que a aptidão para trabalhar com as várias representações não se expande naturalmente, sendo que existem inúmeras formas de promover a exposição da situação-problema com base nas diferentes representações, fomentando assim a flexibilidade na escolha da representação e legitimando o seu uso, através da colocação de questões investigativas e questões reflexivas, auxiliando os estudantes no que concerne a tornarem-se cautelosos com a possibilidade da utilização das diferentes representações. Devem por isso, os programas escolares contemplar o uso adequado das novas tecnologias, pois estas enriquecem o leque de possíveis representações e potenciam o desenvolvimento das capacidades cognitivas dos alunos. A tecnologia não só influência o modo como a matemática é ensinada e aprendida, mas também afeta o que é ensinado e o momento em que determinado tema é abordado. Silva e Balsa (2002) sustentam que o integrar da tecnologia na escola e na disciplina de matemática é um dos maiores desafios da educação. De certa forma, a capacidade da escola e nomeadamente da matemática responderem aos desafios da atualidade e do futuro é medida pela eficácia com que a tecnologia é integrada nos currículos escolares.

2.2. A introdução da calculadora gráfica no currículo português

A necessidade de se utilizar calculadoras nas aulas de matemática prende-se naturalmente com a evolução que as ferramentas tecnológicas foram tendo na sociedade. Na década de sessenta apareceram as primeiras calculadoras eletrónicas e nos anos setenta surgiram os modelos de bolso. No encadeamento com a evolução da tecnologia, na década de oitenta a comunidade matemática portuguesa sente também a necessidade de uma mudança no ensino. No editorial da edição número um da revista Educação e Matemática**,** Paulo Abrantes dizia que o ensino da Matemática estava em crise: "Um número crescente de alunos não gosta de Matemática, não entende para que serve estudar Matemática, não compreende verdadeiramente a sua relevância. Mesmo os que têm classificações positivas procuram dominar técnicas úteis para resolverem exercícios tipo” (Abrantes, 1987, p.3).

Em Portugal, depois de publicada a Lei de Bases do Sistema Educativo em 1986, com vista à renovação curricular para a Matemática, foram nomeadas equipas responsáveis para os diferentes níveis de ensino, a fim de se definirem os novos programas. Na sequência desta movimentação, a A.P.M. (Associação e Professores de Matemática) promoveu a discussão dos diferentes pontos de vista em relação à renovação curricular da Matemática, inclusivamente, em relação à introdução das calculadoras no processo ensino aprendizagem. A mesma associação, em 1988, elaborou um documento, “Renovação do Currículo de Matemática” onde era sugerida a utilização das calculadoras no ensino.

Em 1985, a empresa japonesa Casio desenhou a primeira calculadora gráfica, cuja novidade era poder-se realizar facilmente gráficos de funções. Esta calculadora deu origem a uma revolução no ensino e aprendizagem da Matemática, pois finalmente estava ao alcance dos alunos uma máquina de bolso que, para além de outras funcionalidades, traçava o gráfico de qualquer função, introduzindo apenas a sua expressão analítica. Em Portugal esta inovação teve efeitos práticos no ano letivo de 1995/1996, quando surgem orientações de gestão do programa de matemática, recomendando a utilização das calculadoras gráficas. A partir do ano letivo 1997/1998 as calculadoras gráficas passaram a constar no programa oficial.

A calculadora gráfica parece ganhar cada vez mais preponderância no ensino e aprendizagem da Matemática, principalmente no tema das funções, onde a referência ao uso da calculadora é constante. Isso verifica-se no programa do ensino secundário de Matemática A de 2001 onde voltam a constar as tecnologias nos temas transversais, dando bastante ênfase ao uso da calculadora gráfica. No tema das funções, a referência ao uso da calculadora gráfica é constante: "Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos tanto de forma exata como de forma aproximada a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou no computador. O estudo das transformações simples de funções deve ser feito, tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador, que na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à modelação matemática e que a resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada de verificação numérica ou gráfica. O programa refere a importância de os alunos confrontarem os resultados teóricos com os da calculadora. Também nos exercícios que se pretende que sejam resolvidos com a calculadora, os alunos devem descrever os raciocínios e interpretar os resultados" (DES, 2001, p.28).

Após a análise de estudos efetuados, não restam dúvidas sobre as vantagens da utilização das calculadoras gráficas no ensino secundário (Rocha, 2011). A questão que agora se coloca é sobre a melhor forma de integrar a calculadora no ensino da Matemática. A complexidade deste processo coloca o professor perante desafios, pois não se trata de ensinar apenas técnicas de procedimentos de cálculo. Talvez por isso o recurso efetivo às calculadoras na sala de aula, em todo o mundo, tenha evoluído tão lentamente, contrariamente ao ritmo com que têm evoluído as calculadoras, pois foram surgindo novos modelos, cada vez mais sofisticados e variados, de acordo com um nível de funcionalidade requerido por programas, situações e contextos de ensino e aprendizagem. Domingos (2011) afirma que as tecnologias continuam em franca expansão, aparecendo a cada dia que passa novas e mais potentes ferramentas que nos podem servir como auxiliares preciosos na tarefa de ensinar e aprender matemática. Considera, no entanto, que a preocupação se deve centrar na forma como poderemos explorar e rentabilizar algumas destas ferramentas em prol de um ensino de qualidade, em vez de estarmos preocupados em utilizar as ferramentas mais recentes, por vezes de uma forma menos refletida. Podemos afirmar que todos os professores, uns mais outros menos, utilizam a calculadora gráfica nas suas aulas do ensino secundário. Contudo, o problema que se põe é como desenvolver uma metodologia de investigação com calculadora para elevar a educação matemática.

Num estudo em França, que tinha como objetivo investigar o ponto de vista dos professores que experimentaram a *TI-nspire* em turmas piloto quanto à integração desta calculadora em aula (Guin e Trouche, 2005), considerou-se que a versão software da calculadora era bastante útil, uma vez que permite, sobretudo, projetar uma calculadora virtual permitindo que os alunos acompanhem os procedimentos que o professor está a utilizar. Em relação às potencialidades, destacam os seguintes aspetos: a dinâmica da calculadora, a integração entre as diferentes aplicações, a compatibilidade entre as várias ferramentas (calculadora/calculadora e calculadora/computador) e também a gestão de documentos. No âmbito deste trabalho tenta-se utilizar as potencialidades deste software de forma a obter uma eficaz recolha de dados para interpretação das resoluções e aprendizagens dos alunos na realização de tarefas específicas.

Contudo, para se proporem recursos que enriqueçam o processo de ensino aprendizagem é necessário um bom conhecimento do artefacto. Isto exige um grande trabalho individual e de equipa, conhecimentos de informática e da calculadora para uma prática instrumental eficaz, estratégias específicas e reflexões profundas. O sistema de atividade humana de Engeström (1999) traduz bem esta situação, pois realça as diferenças entre uma ação individual e uma atividade coletiva. Destaca toda a atividade do professor como mediador, assim como a influência da divisão do trabalho no resultado da atividade. Para isto acontecer, é indispensável compreender bem os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos. Um ensino bem sucedido requer que os professores examinem continuamente a sua relação com os alunos, os colegas, os pais e o seu contexto de trabalho. Cabe ao professor propor situações didáticas, com ou sem calculadora.

A calculadora gráfica permite a exploração de atividades que envolvem modelação, simulação e resolução de situações problemáticas, fazendo a ligação das várias representações, o que é crucial para a consolidação dos conhecimentos. Por outro lado, as novas calculadoras gráficas permitem explorar situações ao nível das possíveis conexões entre diferentes conteúdos. A Matemática, apesar de estar dividida em temas, é um todo integrado. Parece ser importante que este conceito faça parte da visão do aluno.

2.3. Limitações da utilização da calculadora

Apesar de ser um instrumento essencial no ensino da Matemática nas escolas e uma mais-valia tanto para os professores como para os alunos, existem vários fatores que evidenciam as limitações da calculadora no contexto escolar. Em primeiro lugar, as reduzidas dimensões do ecrã da calculadora podem dificultar a análise das características de algumas funções. Frequentemente os gráficos sugerem conclusões erradas, quase sempre devido a uma incorreta utilização da janela de visualização. Deve ser ensinado ao aluno que o que se vê na calculadora é apenas uma aproximação do gráfico de uma função.

Para além disso, nas primeiras aulas com calculadoras, torna-se difícil trabalhar com a turma, pois existem pelo menos três modelos diferentes. De modo a ultrapassar esta situação, os professores têm que ir explicando os procedimentos nos diferentes modelos, o que torna o processo demasiado moroso. A calculadora pode ainda levar a um trabalho menos partilhado, ou seja, mais individualista, onde há menos interação. O contrário sucede quando o ecrã da calculadora é reproduzido por um projetor de vídeo num quadro visível a toda a classe.

Outra questão muito reclamada é o facto de, o uso incorreto da calculadora no cálculo levar a que os alunos cometam erros de escrita graves. Rocha (2002) refere que as calculadoras são excessivamente utilizadas ao nível do cálculo, o que pode dar origem a uma grande dependência deste artefacto por parte do aluno. Os alunos procuram sempre o caminho mais fácil, e como é de esperar, com a calculadora em mãos utilizam-na até para cálculos simples, facilmente realizáveis mentalmente. Este é um grande inconveniente desta ferramenta, pois deixam de exercitar o cálculo mental e muitas vezes confiam plenamente no resultado obtido na calculadora, mesmo que este não se ajuste ao contexto do problema. Esta situação ocorre com muita frequência, sobretudo quando o aluno introduz erradamente os dados (Rocha 2002).

2.4. Estudos já realizados e principais resultados

Apesar de se utilizar a calculadora há cerca de vinte anos, o trabalho de investigação sobre o mesmo, não é sempre bem aceite, nem bem compreendido, nem bem documentado. Hoyles e Lagrange (2010), na sua revisão de literatura de pesquisa na área do uso das tecnologias e o seu potencial para a melhoria do ensino da Matemática, concluem que são escassos os estudos sobre a apropriação por parte dos professores de Matemática, das tecnologias nas suas práticas de sala de aula, pois apesar de se reconhecer que têm um papel central, têm sido pouco considerados na investigação. Basicamente, apenas existem relatórios sobre como estas ferramentas foram adotadas.

Waits e Demana (2000), inferem, a partir de estudos realizados, que os estudantes que utilizaram a calculadora gráfica desempenharam e induziram melhores níveis de consciência metacognitiva com menos esforços mentais, mais investimento na aprendizagem e um aumento na eficiência instrumental. Estes autores evidenciam o impacto pedagógico do uso da calculadora gráfica como ferramenta no ensino e aprendizagem da Matemática. Consideram ainda que o ambiente de aprendizagem deve ser ativo e dinâmico e o pensamento dos alunos deve estar voltado para a exploração e aplicação do que aprenderam. Para além do cálculo, o aluno aproveita pouco as potencialidades da calculadora. Como referem Boers e Jones (1994), mesmo durante um exame, em questões em que o recurso à calculadora seja vantajoso, existe muito pouca evidência que esta tenha sido utilizada. Da análise de resultados do Gabinete de Avaliação Educacional do GAVE (2011), a única exceção parece ocorrer nos casos em que o enunciado pede especificamente a resolução gráfica, e nestes casos os resultados são insatisfatórios. Numa publicação da Texas, referenciando Burrill, Allison et al. (2002), concluiu-se que o ensino que realça os conceitos e as ligações entre as representações é mais bem sucedido do que o ensino concentrado em abordagens tecnológicas e algébricas procedimentais. Menciona-se o resultado de estudos interpretativos e comparativos, onde se conclui que os alunos cujos professores ilustraram as ligações entre as representações e os conceitos realçados obtiveram melhores resultados do que os alunos cujos professores concentraram as atenções em abordagens tecnológicas e algébricas.

Alguns estudos realizados nos anos noventa limitavam-se a efetuar comparações entre a utilização da calculadora gráfica e o papel, lápis e a calculadora. Esses trabalhos davam uma perspetiva pouco abrangente de como e quando os alunos utilizavam a calculadora num contexto educacional, ficando por observar a relação entre o conhecimento dos professores e estratégias pedagógicas, bem como o uso que dá à calculadora. A partir de um estudo realizado em aula por Doerr e Zangor (2000), chega-se à conclusão que a calculadora é uma ferramenta muito útil na procura de respostas significativas a situações problemáticas. No entanto, deve-se acautelar para as suas restrições enquanto ferramenta matemática, direcionando os seus alunos para uma visão sobre a calculadora como uma ferramenta sobre a qual devem questionar os seus resultados à luz dos seus conhecimentos matemáticos. Há que atender ao facto de os alunos poderem desconhecer o seu funcionamento e que os grandes problemas que os alunos enfrentam ao tentar interpretar a informação disponibilizada pela máquina estão focados na dificuldade que estes têm em integrar informação obtida por processos algébricos com informação obtida a partir da calculadora. Uma grande maioria dos alunos estuda matemática tendo como primordial objetivo a possibilidade de esta lhe ser proveitosa para uma outra atividade. Assim, é compreensível a relevância do seu estudo numa visão prática da matemática em detrimento do pensamento matemático como o raciocínio dedutivo e a prova.

As aplicações das tecnologias, mais particularmente das calculadoras ao ensino e à aprendizagem da matemática produziram efeitos que haviam sido preditos por Henry Pollack (1986, citado por Waits e Demana, 2000). Algumas matemáticas tornaram-se menos importantes, como por exemplo muitas técnicas de papel e lápis de manipulação simbólicas e aritméticas. Em segundo lugar, algumas matemáticas tornaram-se mais importantes, como por exemplo a matemática discreta, a análise de dados, representações paramétricas e matemática não linear. E por fim, algumas matemáticas tornaram-se possíveis, como a geometria fractal.

Com a introdução das calculadoras há algo que se assimilou, e a forma como se ensina e como se aprendem foram alteradas. Anteriormente, era necessário que os alunos passassem muito tempo a treinarem-se e tornarem-se proficientes no uso de técnicas manipulativas e computacionais. Hoje em dia, muito desse tempo pode ser aproveitado para a construção de um pensamento mais global e assertivo. A introdução das tecnologias na educação matemática, nomeadamente das calculadoras gráficas, nunca foi pacífica. Vozes inversas à sua introdução defendem o regresso a uma aritmética e a um cálculo, de papel e lápis. Feinerman e Ocken (2002) são da opinião que as crianças devem compreender o significado por detrás da matemática. Para isso, os alunos devem começar por estudar matemática num estádio concreto, passando para o estádio seguinte, o da abstração, para que finalmente estejam capazes de aprender matemática de uma forma significativa.

A matemática é sobre muitas coisas, incluindo a modelação do mundo exterior, mas a maior parte dos problemas da vida real não são simples, embora alguns proeminentes educadores matemáticos tenham difundido a ideia que alguns problemas matemáticos complicados têm respostas simples. Waits e Demana (2000) reforçam a ideia quando referem que há ainda a dificuldade associada em explicar a verdadeira natureza da matemática, pois muitos alunos viam e ainda vêem a matemática como um conjunto de truques e regras para memorizar, para calcular ou resolver algo. Por isso, põe-se a necessidade de uma pesquisa mais aprofundada, que deveria concentrar-se na melhor maneira de implementar e integrar a calculadora no currículo de Matemática. Neste sentido, os autores chegaram à conclusão que uma aproximação equilibrada entre as técnicas de papel e lápis e o uso das tecnologias no ensino e na aprendizagem da matemática é essencial. Continuando o mesmo raciocínio, adicionavam ainda que para além de continuarem a ser muito importantes, as técnicas e as aptidões aritméticas e algébricas tornar-se-ão ainda mais relevantes no futuro à medida que avançamos para ambientes de aprendizagem computacionais intensivos. Ou seja, é importante para os alunos possuírem sentido do número, de forma a reconhecerem quando as respostas estão corretas e que conheçam métodos de verificar respostas sem a resolução completa do problema e também auxilia os alunos a entenderem, nem que seja de uma forma intuitiva, porque os procedimentos funcionam e quando são aplicáveis.

Na apresentação das conclusões do projecto *The Calculator and Computer Precalculus Project* (C2PC), Waits e Demana (1994) afirmavam que quando é usada tecnologia gráfica serão necessárias novas ideias matemáticas, que passam em primeiro lugar pelas *janelas de visualização* em que se muda o esboço de um gráfico para uma sua representação onde se encontram bem definidos os intervalos entre os quais os valores de *x* e de *y* vão variar. Em segundo lugar, pelos *gráficos completos,* onde se possui uma perceção exata acerca do comportamento da função, não nos escapando outros pontos notáveis. Em terceiro lugar, pelos modelos comportamentais*,* em que a álgebra possui um novo papel na matemática escolar, uma linguagem de representação, mais do que uma ferramenta para a manipulação de papel e lápis. Mais importante hoje em dia é a capacidade dos alunos para a correta representação algébrica quando confrontados com um problema real em vez de aplicarem manipulações de papel e lápis a uma série típica de problemas dos livros de texto.

Ainda noutro estudo, conduzido por Graham (2003), no qual se pretendia averiguar a forma como os alunos usam a calculadora num momento de avaliação formal, permitiu identificar três categorias como a calculadora é usada, sendo cada categoria descrita da seguinte forma. A primeira categoria, *Quasi-científica,* em que a calculadora é utilizada da mesma forma que uma calculadora científica, não são utilizadas quaisquer potencialidades gráficas da calculadora, não se traduz em qualquer ganho para o aluno o facto de poder trabalhar com uma calculadora gráfica. Uma segunda categoria, a *Semi-proficiente,* onde são utilizadas algumas das potencialidades gráficas da calculadora e daí resulta algum benefício para o aluno, no entanto a melhor utilização ou um uso mais eficiente não é feito, o aluno está a par das potencialidades gráficas da calculadora mas simplesmente não sabe servir-se delas. E por fim, a categoria *Proficiente*, em que é feito o uso apropriado das potencialidades da calculadora de forma a obter a mais eficiente solução para a tarefa que possui entre mãos, o aluno está a par da diversidade de opções gráficas na calculadora e está apto para selecionar um método apropriado ou opção para chegar à solução. As conclusões apresentadas por este estudo apontavam algumas razões descritas pelos alunos para não terem obtido um melhor desempenho na utilização da calculadora. Em primeiro lugar, o uso da calculadora por parte dos alunos é condicionado pela familiaridade, ou pela sua falta, com que trabalham com a máquina gráfica. Deveria haver uma maior orientação superior que apontasse para um incremento no uso da calculadora. Por fim, os autores sugerem que a proibição do uso de calculadoras gráficas em anos anteriores condicionou de certa forma uma maior e melhor utilização da calculadora. Os alunos devem ser encorajados a fazerem um uso mais extensivo da calculadora durante os seus estudos para que estejam mais familiarizados e mais confiantes no seu uso.

Em Portugal, no ano de 2002 o Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) apresentou os resultados do estudo efetuado – Contributo para uma melhor compreensão do desempenho dos alunos nos exames do 12º ano. Outros investigadores, como Silva e Balsa (2002) verificaram que embora os resultados obtidos nas questões envolvendo calculadora fossem efetivamente maus, estes verificaram-se em questões bastante difíceis, que envolviam sempre mais algum raciocínio, para além da simples utilização dos gráficos da calculadora. O relatório do GAVE (2010) sobre os resultados dos exames nacionais, considerava importante reforçar a resolução de problemas da vida real e a utilizar a calculadora gráfica na resolução de exercícios. Parece de todo pertinente que se avalie a utilização que os alunos e professores fazem da calculadora na resolução de tarefas. Rocha (2002) estudou a utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de matemática e concluiu que o tipo de tarefa proposta ao aluno interferia na forma como este utilizava a calculadora gráfica. A autora afirmava ainda que a postura do professor face à tecnologia e à sua utilização no processo de ensino/aprendizagem tem influência na forma como os alunos encaram a matemática escolar.

3. METODOLOGIA

Este capítulo tem como objetivo a contextualização do trabalho desenvolvido e o enquadramento dos intervenientes no estudo. Referenciam-se as características da investigação qualitativa que foram importantes no trabalho e descrevem-se sucintamente as calculadoras gráficas utilizadas, de forma a conhecer as suas potencialidades e o trabalho realizado. É necessário frisar que a metodologia seguida neste trabalho é de natureza qualitativa, uma vez que se pretende compreender a forma como os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de tarefas. Considerou-se este método o mais adequado, uma vez que, tal como referido por Bogdan e Biklen (1994), o objetivo de estudo consiste, exatamente, no modo como as diferentes pessoas envolvidas entendem e experimentam os objetivos. São as realidades múltiplas e não uma realidade única que interessam ao investigador qualitativo (Bogdan e Biklen, 1994). Para este trabalho, foram escolhidos alunos de diferentes escolas, aos quais foi proposta a resolução de tarefas dirigidas para um possível uso da calculadora gráfica. Na seleção das tarefas teve-se em conta o tipo de exercícios que habitualmente resolviam em sala de aula e a preparação para o exame intermédio nacional de matemática que tinham de realizar.

3.1. Investigação qualitativa

Bogdan e Biklen (1994) empregam a expressão investigação qualitativa, como um termo genérico que engloba várias estratégias de investigação com diferentes características. Na investigação qualitativa, nos dados recolhidos, os pormenores descritivos são abundantes e de complexo tratamento estatístico. Para estes autores, a investigação não é feita para responder-se a questões prévias ou para testar hipóteses, mas sim para privilegiar a compreensão dos comportamentos a partir da perspetiva dos sujeitos de investigação. As estratégias mais representativas da investigação qualitativa são a observação participante e a entrevista em profundidade. O investigador insere-se no meio das pessoas que pretende estudar, procura conhecê-las, dar-se a conhecer e conquistar a sua confiança, descrevendo através de um registo escrito e sistemático tudo aquilo que ouve e observa. Segundo estes autores, investigação qualitativa possui cinco características principais. Em primeiro, os autores defendem que a fonte de dados é o ambiente natural. Uma vez que o investigador passa muito tempo com as pessoas nos locais de estudo (pois as ações do sujeito entendem-se melhor quando contextualizadas), este deve interagir com o sujeito de forma natural para conseguir captar o seu ponto de vista.

Bogdan e Biklen defendem também que a investigação é descritiva. Os dados são apresentados minuciosamente sob a forma de texto, podendo conter citações. Referem ainda que o processo é mais importante do que os resultados. O investigador ao longo da recolha de dados pode tirar conclusões úteis à investigação. Os autores frisam também que a análise dos dados é indutiva, ou seja, no processo de análise dos dados, as coisas estão abertas de início e vão-se tornando mais fechadas e específicas no seu término. Por fim, o significado é de importância vital: o investigador deve questionar o sujeito com o objetivo de perceber o ponto de vista deste. Para além disso, como em qualquer outra investigação, o investigador deve respeitar o participante, ser realista e autêntico na apresentação dos resultados.

Numa investigação é também necessário escolher bem a fonte dos dados. No presente estudo, recorreu-se ao denominado estudo de caso. O estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico. Existem vários critérios de escolha dos sujeitos e a decisão tomada pelo investigador pode ser polémica, assim como a generalização dos resultados. Cabe ao leitor conhecer o processo e tirar as suas próprias conclusões (Merriam 1988, citado por Bogdan e Biklen, 1994).

Também Ponte (1994) numa das suas publicações pronuncia-se sobre este tema, referindo que um estudo de caso é caracterizado como incidindo numa entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Este visa conhecer em profundidade o processo a analisar, fazendo justiça à sua unidade e identidade próprias, assumindo-se como uma investigação particularística e procurando descobrir o que nela há de mais essencial e característico (Ponte, 1994). Esta é uma das maneiras de fazer pesquisa em ciências sociais. Outras há como por exemplo levantamentos, pesquisas históricas e análise de informações em arquivos. Cada uma delas tem vantagens e desvantagens, dependendo principalmente do tipo de questão de pesquisa. Para Yin (2001), os estudos de caso representam a estratégia eleita quando se colocam questões do tipo “como” e “porquê”, quando o investigador tem pouco controle sobre os eventos e em situações nas quais o foco se encontra em fenómenos complexos, inseridos no contexto da vida real.

3.2. O contexto do estudo

Neste trabalho pretende-se conhecer o processo de utilização de uma ferramenta, por este motivo, é pertinente conhecer o meio em que os intervenientes estão inseridos. O estudo foi realizado num centro de estudos, especializado em matemática, situado no Parque das Nações em Lisboa. O centro funciona há sete anos e é frequentado por alunos de vários níveis de ensino, cujos encarregados de educação, na sua grande maioria pertencentes à classe média-alta, demonstram interesse em saber acerca do rendimento escolar dos seus educandos, através do contato direto com a diretora e os professores do centro. A direção do centro de estudos apoiou esta investigação, vendo-a como uma mais-valia para as aprendizagens dos alunos, salvaguardando o facto de que a mesma não atrasasse o processo de estudo para os momentos de avaliação dos participantes.

Foi solicitada uma autorização aos Encarregados de Educação para se proceder a este estudo, à qual não houve nenhuma objeção (Anexo I). De forma a manter o anonimato dos alunos, os seus nomes serão fictícios.

Com vista a realizar uma investigação mais diversificada na recolha de dados, onde se pudesse analisar eventuais diferenças entre alunos com diferentes métodos de ensino, optou-se por escolher alunos que estudassem em diferentes escolas e que estivessem no 11º ano de escolaridade, pois este nível de escolaridade reúne condições para se proceder a um estudo desta natureza. O alunos já estão familiarizados com a calculadora gráfica desde o 10 º ano e o conteúdo programático de trigonometria é lecionado com mais relevância, sendo por isso expectante que os alunos realizassem com alguma destreza as tarefas propostas e assim proporcionassem uma eficaz recolha de dados.

3.2.1 Os alunos participantes

Os participantes frequentam o centro de estudos desde o ensino básico, havendo um historial possível de ser consultado. As suas fichas de trabalho e resultados escolares são arquivados em base de dados computacional. É possível consultar as avaliações dos alunos e até mesmo as matérias em que tiveram mais dificuldade. Ao analisar os testes diagnósticos dos participantes e também em diálogo informal com os alunos e com a diretora do centro, foi possível saber mais acerca dos seus percursos escolares.

Os três alunos estudam em Lisboa. O Danilo, aluno na Escola Eça de Queirós, obteve a classificação de 12 valores no ano letivo anterior. Para tornar a matemática menos difícil, faz muitos exercícios e realiza com regularidade as tarefas propostas pelo professor. Tendencialmente memoriza resoluções. As suas notas no ensino básico foram maioritariamente de nível 3. A Vera, aluna na Escola Rainha Dona Leonor, obteve a classificação final de 14 valores à disciplina de Matemática no 10º ano e obteve sempre níveis 4 no terceiro ciclo do ensino básico. A diretora do centro de estudos caracterizou-a como trabalhadora, cumpridora de tarefas escolares e sempre que tem dificuldade apresenta as suas dúvidas.

O Tomás é aluno na Escola António Damásio. Mostra-se um aluno perspicaz no caminho que escolhe para as resoluções dos exercícios. Obteve a classificação final de 14 valores no 10º ano. Contudo, este ano letivo, segundo a diretora do centro, tem denotado interesses divergentes aos da escola. Costuma trazer a máquina de calcular e usa-a sempre que acha pertinente. As suas notas foram de níveis 3 no 7º ano, 4 no 8º ano e 4 no 9º ano.

Nenhum dos alunos registou retenções durante o seu percurso escolar. Os três alunos usavam calculadoras gráficas diferentes. Inicialmente, demonstraram alguma falta de prática quanto à utilização da calculadora gráfica no que diz respeito à análise de gráficos de funções, principalmente o Danilo. Sintomático desse facto, é o aluno utilizar duas calculadoras. Uma para a construção de gráficos e outra apenas para a realização de cálculos simples, com a qual se sentia mais à vontade.

Todos demonstraram algumas dificuldades na trigonometria. A Vera compreende os conteúdos com relativa facilidade, sendo mais organizada na apresentação das suas resoluções. O Tomás mostra ter maior facilidade em relacionar as matérias. Embora em escolas diferentes, os alunos encontravam-se cronologicamente na mesma parte dos conteúdos programáticos, embora o Danilo estivesse um pouco atrasado no desenvolvimento dos conteúdos.

O trabalho de campo consistiu fundamentalmente na resolução de tarefas com utilização da calculadora gráfica e gravação dos procedimentos utilizando o sistema TI-Navigator da Texas. As resoluções das tarefas foram gravadas através deste sistema que costumava estar instalado na sala de estudo e cuja presença, os alunos já não estranhavam. A máquina Texas TI-nspire era por vezes utilizada, quando os alunos não traziam as suas calculadoras ou quando era oportuno e prático o seu uso. O objetivo era os alunos desenvolveram a génese instrumental com a calculadora que iriam utilizar aquando da gravação em vídeo das suas resoluções.

Atendendo aos objetivos deste estudo, pretendeu-se perceber o quão à vontade os alunos estavam com o manuseamento das novas tecnologias da sala de aula e ir conhecendo os esquemas instrumentais que estes desenvolviam utilizando a calculadora gráfica. Analisou-se se os alunos eram capazes de relacionar as diferentes representações matemáticas durante a resolução de tarefas. Tentou-se aferir até que ponto a calculadora gráfica tinha contribuído para a compreensão dos conceitos que se pretendia estudar.

Relativamente à seleção de tarefas, teve-se em conta os exercícios praticados em sala de aula e analisou-se, na medida do possível, até que ponto estes incentivavam e eram perspetivados para a utilização da calculadora gráfica com vista ao desenvolvimento do conhecimento e raciocínio dos alunos.

Posto isto, foram sendo resolvidas tarefas pelos alunos, em momentos diferentes: as primeiras tarefas foram propostas durante o primeiro período, sendo adaptadas ao grau de exigência e tipo de exercícios que praticavam em aula, tendo sido aplicadas cinco tarefas diferentes, conforme o aluno. Já no segundo período, numa altura do ano letivo mais próxima do exame nacional de avaliação intermédia, foram realizadas mais duas tarefas comuns aos três alunos.

Cada tarefa tem os seus objetivos e algumas destas só seriam possíveis de testar com conhecimentos adquiridos previamente. Após a realização das primeiras tarefas, tornou-se claro que os conhecimentos de utilização da calculadora gráfica eram poucos. Esta forma de atuar na recolha de dados permitiu uma melhor compreensão do processo de apropriação do instrumento por parte dos alunos, tornando assim o investigador mais consciente dos diferentes passos do processo.

3.3. Técnicas de recolha de dados

A recolha de dados foi realizada essencialmente pela gravação dos processos utilizados pelos alunos na resolução gráfica das tarefas. Uma vez que se desconheciam os professores dos estudantes participantes do estudo, os quais propuseram aos seus alunos exercícios de trabalho de casa sem terem conhecimento prévio da realização desta investigação, analisou-se o género de exercícios propostos pelos professores e foram selecionadas tarefas que fossem de encontro às orientações que estes sugeriam, sempre com o cuidado de manter um denominador comum no trabalho de todos os alunos. Escolheram-se tarefas exequíveis e acessíveis como dados do estudo e de acordo com a utilização e frequência que os alunos faziam da calculadora gráfica, pois o objetivo primordial do estudo não concerne em verificar se os alunos conseguem realizar o exercício, nem mesmo se o aluno concluiu ou não com êxito a tarefa, mas sim todo o processo subjacente durante a realização da mesma.

Neste estudo trabalhou-se com a TI-nspire, da Texas. Esta máquina permite guardar os documentos em pastas, como num computador e pode ser uma mais-valia na preparação de aulas. É possível atualizar o software da calculadora, fazer download de programas, utilizar uma bateria recarregável, ter ecrã a cores, gravar documentos e ainda criar, editar e guardar uma sequência de passos matemáticos num documento. Existem ainda versões possíveis de descarregar a serem usadas em *tablet*. No âmbito deste trabalho, a característica mais importante é a possibilidade da utilização do TI-Navigator da Texas que permite a gravação através de rede sem fios, do ecrã da máquina. Contudo, só é possível efetuar a gravação de uma calculadora de cada vez, daí não ser possível gravar as resoluções simultâneas dos alunos, mas sim de cada um, em momentos diferentes.

Após a análise dos cadernos diários e da escolha das tarefas adequadas a cada um dos alunos, prosseguiu-se para a fase de gravação em vídeo com TI-Navigator, da resolução das tarefas por cada um dos alunos, na sala do centro de estudos onde o investigador deste estudo desempenha o papel de professor orientador dos estudos dos alunos. Durante a realização das tarefas tomou-se notas de campo daquilo que se ouviu, viu e daquilo que poderia ser relevante para uma reflexão, pois os dados são as provas e pistas, são os materiais em bruto que se recolheram e foram a base de análise. Para completar a recolha de dados, a diretora do centro de estudos forneceu sobre os alunos-participantes, dados que permitiram caracterizar com mais pormenor cada um dos alunos envolvidos.

Por fim, analisaram-se os dados, primeiro de uma forma descritiva, registando objetivamente os detalhes e posteriormente de uma forma reflexiva, que conduziram ao produto final da investigação, nomeadamente, às possíveis conclusões, pois os factos são um meio para clarificar o pensamento e gerar ideias e não um fim em si mesmo (Bogdan e Biklen, 1994).

4. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, pretende-se fazer uma análise dos dados obtidos através das tarefas propostas aos participantes no que concerne à utilização da calculadora gráfica no estudo da trigonometria. Realizou-se uma descrição do trabalho de campo, de modo a dar mais relevância aos processos do que aos resultados. Tentou-se compreender os processos de utilização do instrumento em conformidade com o contexto e descrevê-los. Deu-se especial atenção à capacidade dos alunos em compreender e relacionar diferentes representações semióticas, tais como esquemas, desenhos, gráficos cartesianos, linguagem algébrica e os próprios comentários orais.

A escolha do tema trigonometria prende-se com o facto do seu estudo poder ser realizado envolvendo e relacionando diferentes representações do mesmo conceito, permitindo assim uma análise mais detalhada do raciocínio dos alunos quando resolvem as tarefas propostas.

A trigonometria desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à astronomia e à navegação. Pode por isso também ser associada a questões envolvendo situações concretas do quotidiano, de forma a os alunos conseguirem um mais amplo entendimento dos problemas.

A forma como os alunos compreendem o conceito de função é também muito importante para o entendimento de tarefas envolvendo funções trigonométricas. A calculadora gráfica permite perceber melhor o conceito de função, na medida em que é possível, para além de visualizar a sua representação gráfica, associar os resultados apresentados de todo o processo de modelação matemática às diferentes representações analíticas.

O trabalho deverá ser diversificado, e em qualquer nível de escolaridade a resolução de tarefas é fundamental para introduzir um conceito, fazer uma investigação, aprofundar conhecimentos ou aplicar os conceitos adquiridos em diferentes situações. Existem muitas definições de tarefas, onde se englobam os exercícios, projetos, explorações e investigações (Ponte, 2004). Neste trabalho foram escolhidas tarefas que vão de encontro às propostas feitas pelos professores aos alunos nas suas aulas, de modo a que o trabalho fora da escola fosse devidamente rentabilizado.

Nesta investigação, pretende-se conhecer o modo como o aluno utiliza a calculadora no estudo da trigonometria e tirar ilações para melhorar as suas aprendizagens. Para Canavarro (2011), o professor precisa de interpretar e compreender como os alunos resolvem a tarefa e de explorar as suas respostas de modo a aproximar e articular as suas ideias com aquilo que é esperado que aprendam.

4.1. As Tarefas

Tendo sempre em conta os objetivos deste estudo, foram selecionadas e adaptadas tarefas conforme a escola em que os alunos estudavam. As tarefas abaixo designadas como 1.1, 1.2 e 1.3 (Anexos II, III e IV) foram resolvidas, respetivamente pelo Danilo, Vera e Tomás, durante os meses de outubro e novembro de 2013. Era importante que os alunos resolvessem tarefas que fossem de encontro aos exercícios propostos pelos seus professores, daí a seleção de exercícios diferentes conforme os alunos. Consultou-se para este efeito, os cadernos diários dos alunos e os manuais adotados nas suas escolas.

Embora se tratassem de exercícios de grau de dificuldade bastante parecido, foram escolhidos de acordo com os trabalhos de casa que os professores dos alunos indicavam, sendo por isso exercícios diferentes para cada aluno. Posto isto, pode-se dizer que funcionaram para desenvolver três estudos de caso.

Com as primeiras tarefas, pretendia-se que os alunos relacionassem os conhecimentos adquiridos através de representações analíticas, com resoluções através da calculadora gráfica. Pretendia-se analisar a celeridade com que os alunos encontravam os menus corretos e se a preferência pela resolução através da máquina era eficiente e satisfatória para estes. Genericamente, as tarefas 1.1, 1.2 e 1.3 passavam por editar expressões analíticas de funções, analisar os seus gráficos através da escolha da janela adequada, achar extremos, zeros e pontos de interseção.

Tarefa 1.1

Considera as funções definidas por $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$, no intervalo de [0 , 2π]

a) Indica o conjunto dos zeros de cada uma das funções no intervalo dado

b) Determina as soluções da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo [π , 2π]

Tarefa 1.2

Determine o contradomínio das funções:

a) $f(x) = 0{,}5 + sen(x)$

b) $g(x) = 1 + \cos^2(3x)$

Figura 3.1- Enunciados das tarefas 1.1 e 1.2

Tarefa 1.3

a) Determine entre que valores varia a função $f(x) = 2 + sen(\frac{x}{2})$

b) Resolve a equação $f(2x) - 2 = -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$

Figura 3.2 - Enunciado da tarefa 1.3

Antes da realização das tarefas acima mencionadas, foram sendo resolvidas outras tarefas de preparação, o que permitiu verificar que os alunos apesar de estarem já no 11º ano, apresentavam dificuldades e pouca autonomia ao lidarem com a máquina, nomeadamente na procura de comandos e na utilização de esquemas de instrumentação que já deveriam ter sido adquiridos anteriormente. Revelavam estar numa fase muito inicial dos seus processos de génese instrumental com a calculadora.

As tarefas 2.1 e 2.2 (Anexos V e VI) foram aplicadas numa fase mais próxima do final do primeiro período. O Danilo resolveu a tarefa 2.1, enquanto a Vera e o Tomás resolveram a tarefa 2.2. por se encontrarem num nível semelhante de aquisição e aplicação de conhecimentos.

Tarefa 2.1

Resove a inequação $sen(x) \geq -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$

Tarefa 2.2

Encontra os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $sen(x) \geq \frac{1}{2} \wedge \cos(x) \leq 0$

Figura 3.3 - Enunciados das tarefas 2.1 e 2.2

Com estas duas tarefas aplicadas numa fase em que os alunos já estavam melhor preparados para utilizar a máquina e já tinham consolidado os conhecimentos sobre trigonometria, pretendia-se analisar a sua capacidade em resolver inequações trigonométricas, relacionando diferentes representações, sobretudo no círculo trigonométrico e no referencial cartesiano com o possível recurso à calculadora gráfica.

As tarefas 3 e 4 (Anexos VII e VIII) foram testadas já numa fase de preparação para o exame intermédio de março de 2014, sendo ambas aplicadas aos três alunos. A tarefa 3 foi planeada em duas alíneas, pois pretendia-se que os alunos obtivessem os dados suficientes para resolver a segunda questão, onde a dada altura se iriam deparar com o problema de encontrar o ponto de interseção dos gráficos das funções. Situação esta, apenas resolúvel com o auxílio da calculadora gráfica.

Tarefa 3

Considere a função f de domínio IR definida por $f(x) = 2x - \cos(x)$

Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma reta r, cuja inclinação é 45º, que contém o ponto A(-3,0) e que interseta o gráfico da função f no ponto B.

a) Determina a equação reduzida da reta r

b) Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades

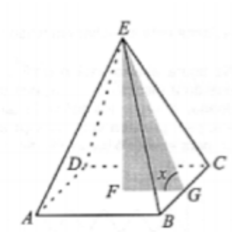
(adaptado - exame nacional 2000)

Figura 3.4 - Enunciado da tarefa 3

A tarefa 4 era mais exigente a nível da capacidade de visualização espacial e da relação de conceitos e representações. Envolvia conceitos de funções que já tinham sido lecionados posteriormente ao tema da geometria. Pretendia-se analisar como os alunos relacionavam conteúdos de tópicos matemáticos diferentes. O conceito de assimptota e a sua associação às funções trigonométricas está implícita na resolução da tarefa.

Tarefa 4

Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular em que *x* designa a amplitude do ângulo FGE



A área total da pirâmide é dada em função de x por:

$$A(x) = \frac{4\cos(x)+4}{\cos(x)} \qquad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Use a calculadora gráfica para resolver o seguinte problema: o que acontece a *A*(*x*) quando *x* se aproxima de $\frac{\pi}{2}$

Interprete geometricamente o valor obtido.

(adaptado - exame nacional 2001)

Figura 3.5 - Enunciado da tarefa 4

Nesta fase final de recolha de dados da investigação, os alunos já se encontravam numa fase mais avançada dos seus estudos e consequentemente também estavam mais aptos no manuseamento e compreensão das capacidades da máquina e da sua utilização na resolução de exercícios. O Tomás e a Vera estavam mais à vontade com a calculadora, mostrando até alguma curiosidade em saber mais sobre as suas potencialidades. O Danilo utilizava frequentemente a máquina para procurar processos de resolução, mas sem convicção e organização suficientes.

As resoluções dos alunos foram sendo acompanhadas pelo investigador, havendo orientações pontuais, como era habitual no centro de estudos. Pretendia-se que de forma natural os alunos fossem resolvendo as tarefas, não só para avaliar os seus conhecimentos, mas sobretudo para estudar as suas opções de resolução e os seus raciocínios.

4.2. O desempenho dos alunos

A análise dos dados foi feita por aluno nas tarefas que foram realizando. Tentou-se interpretar todos os sinais revelados pelos alunos durante a realização das tarefas propostas, atendendo-se sempre à existência de esquemas de utilização da máquina criados por estes, de forma a dar resposta às questões da investigação.

Nos diálogos que se seguem, por vezes as funções são referidas apenas com base na representação da sua expressão analítica. Embora esta seja uma prática associada à linguagem comum, os alunos foram alertados pelo investigador para a definição de função e para a necessidade de identificar todas as suas componentes.

4.2.1. Desempenho dos alunos nas tarefas 1.1, 1.2 e 1.3

O Danilo

Na tarefa 1.1, pretendia-se que o aluno encontrasse formas de determinar os zeros das funções apresentadas e as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das duas funções nos intervalos pedidos. Pelo que tinha sido observado no seu caderno diário, era expectável que o Danilo optasse por métodos analíticos de resolução. Foi sugerido, sem obrigatoriedade, que podia usar os meios mais convenientes para a resolução da tarefa, incluindo obviamente a calculadora gráfica.

Tarefa 1.1

Considera as funções definidas por $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$, no intervalo de $[0 , 2\pi]$

a) Indica o conjunto dos zeros de cada uma das funções no intervalo dado

b) Determina as soluções da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $[\pi , 2\pi]$

Figura 4.1 - Enunciado da tarefa 1.1

Na primeira alínea desta tarefa, o aluno, seguindo processos que estava habituado na sua escola, resolveu o problema de forma analítica, usando lápis e papel. Recorrendo-se de apontamentos onde tinha escrito algumas anotações sobre a resolução de equações trigonométricas, resolveu as equações, comparando as resoluções com exemplos do seu caderno das aulas. Faltou rigor na apresentação do conjunto-solução e não mencionou que a constante *k* pertencia ao conjunto dos números inteiros. Não desenhou em momento algum, o círculo trigonométrico ou outro qualquer esquema de apoio ao seu raciocínio.

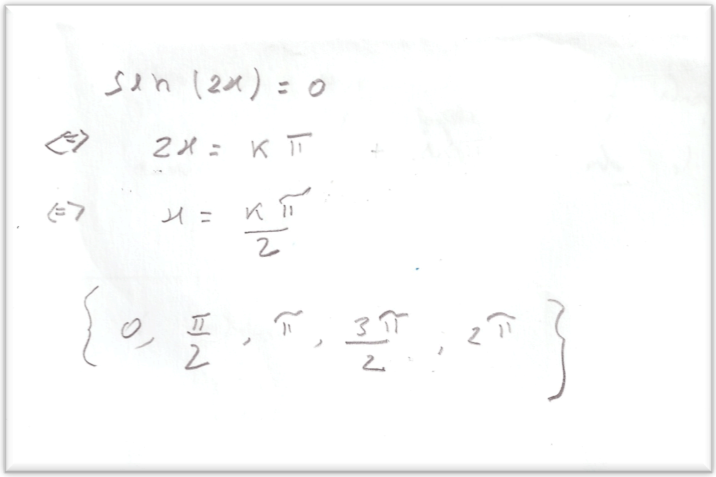


Figura 4.2 - Resolução analítica de *f(x)=0* na tarefa de 1.1 a)

No final, apresentou as soluções $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ e $\{0, \pi\}$ para $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, respetivamente. Usou uma calculadora científica apenas para cálculos intermédios, mas em momento algum recorreu à máquina gráfica. Foi-lhe questionado pelo investigador se não haveria forma mais rápida de descobrir os zeros, ao que ele retorquiu "na máquina?" ... "eu prefiro assim, está certo", disse convicto.

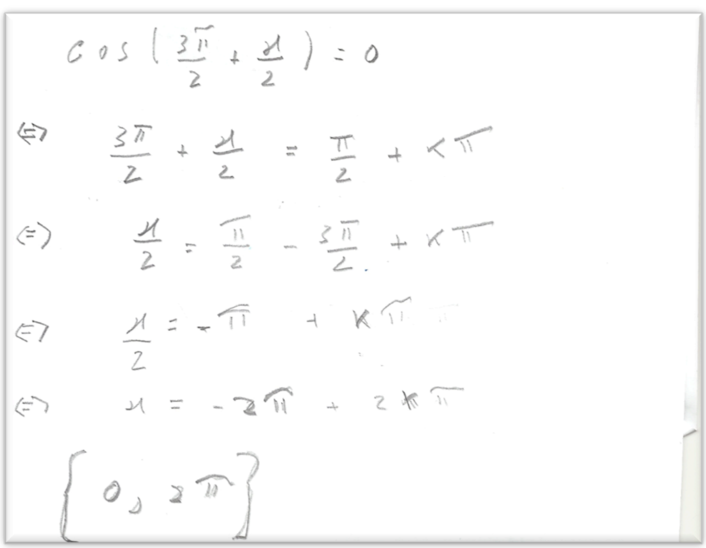


Figura 4.3 - Resolução analítica de *g(x)*= 0 na tarefa 1.1 a)

Na segunda alínea, voltou a preferir resolver o exercício analiticamente. Igualou *f(x)* a *g(x)*, mas não estava a conseguir entender como trataria o *cos(*$\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}$*).* Questionou "e se olhar para o gráfico?". Na máquina, inseriu as expressões analíticas das funções. Não foi diretamente ao menu de edição de funções, ainda perdeu uns segundos à sua procura. Por fim, inseriu as funções como *f1(x)* e *f2(x),* disse "deu isto, deixa-me aproximar" e procurou uma janela adequada escolhendo *zoom trig*. (figura 4.4).

Figura 4.4 - Menu em alínea b da tarefa 1.1

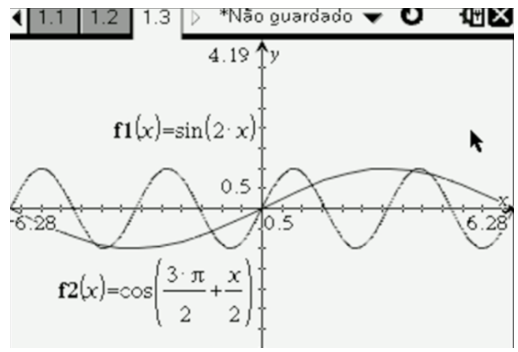


Figura 4.5 - Gráficos da tarefa 1.1 b)

Posteriormente, acedeu a *menu - analisar o gráfico - interseção*. Notou-se claramente que não teve a preocupação de analisar o gráfico no contexto do problema, uma vez que exclamou "são muitas soluções para ver assim!". Deixou então a máquina e quis voltar a resolver no seu caderno.

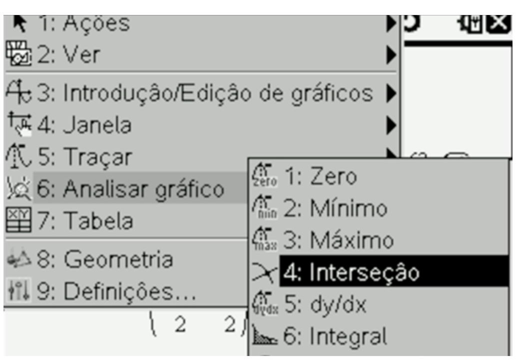


Figura 4.6 - Menu em alínea b) da tarefa 1.1 b)

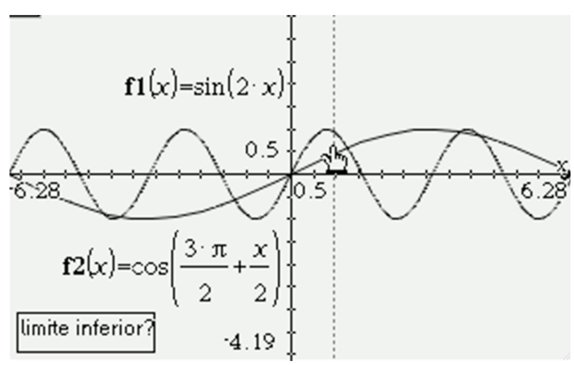


Figura 4.7 - Interseção de gráficos na tarefa 1.1 b)

Tentou encontrar as soluções através do círculo trigonométrico. Contudo, não conseguiu analisar corretamente a sua representação, pois não estabelecia a igualdade entre o $cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2})$ e o $sen\ (\frac{x}{2})$. Procurou nos seus apontamentos o que denominou de regras para a resolução de equações trigonométricas, mas sem êxito, pois não conseguia encontrar o que chamava "igualar um cosseno a um cosseno". Para o auxiliar na resolução da equação, o investigador recordou-lhe noções teóricas de redução ao primeiro quadrante. Com essa informação o Danilo resolveu a equação trigonométrica, embora com alguma falta de rigor na apresentação do resultado final, pois não atendeu ao facto de serem pedidas soluções no intervalo de [π, 2π].

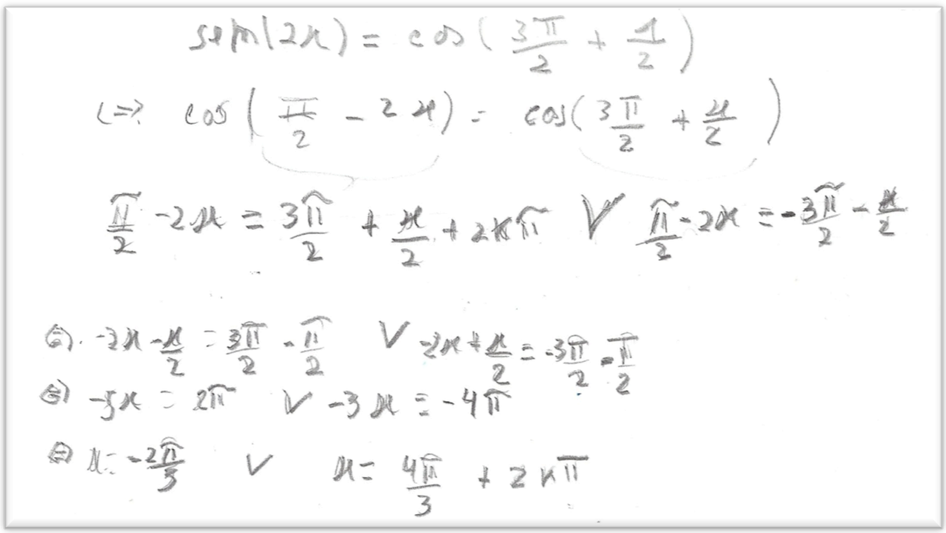


Figura 4.8 - Resolução analítica de *f(x)=g(x)* na tarefa de 1.1 b)

Constatou-se que o aluno trabalhava preferencialmente usando processos analíticos e que evitava o uso da máquina. Na alínea b), embora se apercebesse que teria vantagens em usar a máquina para achar os pontos de interseção, não quis concluir a tarefa com a máquina, por não estar familiarizado com a notação apresentada e não conseguir relacioná-la com as representações que costumava manipular nas aulas.

Em termos de representação, confiava mais nos resultados que aferia do círculo trigonométrico do que nos gráficos da máquina, contudo não foi capaz de tirar as devidas conclusões que o auxiliassem na resolução da tarefa. Não mostrava capacidade de compreender a relação entre as diferentes representações.

O Danilo demonstrou ter pouco conhecimento dos procedimentos a utilizar na calculadora para executar as ações que se pretendia. A máquina era vista como uma calculadora científica acrescida de algumas potencialidades em termos gráficos, mas das quais tirava ainda muito poucos ganhos. Não foi capaz de estabelecer uma relação entre a resolução gráfica e a algébrica. Tinha pouca confiança nos resultados da máquina e recorria a esquemas de compreensão algébrica que lhe fossem mais familiares.

A Vera

Na tarefa 1.2 (figura 4.9), era pedido para determinar o contradomínio das funções apresentadas. Pretendia-se, sobretudo, testar o modo e a destreza com que a Vera analisava os gráficos e achava os extremos das funções.

Tarefa 1.2

Determine o contradomínio das funções:

a) $f(x) = 0{,}5 + sen(x)$

b) $g(x) = 1 + 3\cos^2(3x)$

Figura 4.9 - Enunciado da tarefa 1.2

A aluna considerou o primeira alínea "fácil", contudo passou mal o enunciado e resolveu a tarefa para $f(x)=0{,}5 \times sen(x)$. Enquadrou de imediato o $sen(x)$ entre -1 e 1. Utilizou a máquina apenas para efetuar o cálculo $0{,}5x1=0{,}5$, exclamou "claro!" e escreveu o contradomínio da função f que tinha considerado.

$-1 \leq sen\, x \leq 1$

$-0{,}5 \leq 0{,}5\, sen\, x \leq 0{,}5$ $\qquad$ C.D $[0{,}5 ; 0{,}5]$

Figura 4.10 - Resolução analítica da tarefa 1.2 a)

Na alínea b), a Vera tentou resolver o exercício pelo mesmo método, mas não realizou o enquadramento correto para o $cos^2(3x)$.

$-1 \leq \cos(3x) \leq 1$

$1 \leq \cos^2(3x) \leq 1$

$1 + 3\times 1 \leq 1 + 3\cos^2(3x) \leq 3 + 1$

$4 \leq 1 + 3\cos^2(3x) \leq 4$

Figura 4.11 - Resolução analítica da tarefa 1.2 b)

A aluna ficou confusa com o resultado obtido. Perguntou "não pode ser o intervalo de 4 a 4, pois não?". Foi-lhe sugerido pelo investigador que verificasse na calculadora gráfica. Acedeu facilmente ao editor de equações, mas deparou-se com a situação de não encontrar a forma de escrever $cos^2(3x)$. Resolveu o problema, escrevendo $cos(3x).cos(3x)$. Comentou, "se calhar o erro de há pouco tem a ver com o quadrado."

Procurou através da tecla *menu*, a *janela*, e disse "está aqui uma janela trigonométrica". Ficou surpreendida com o gráfico obtido.

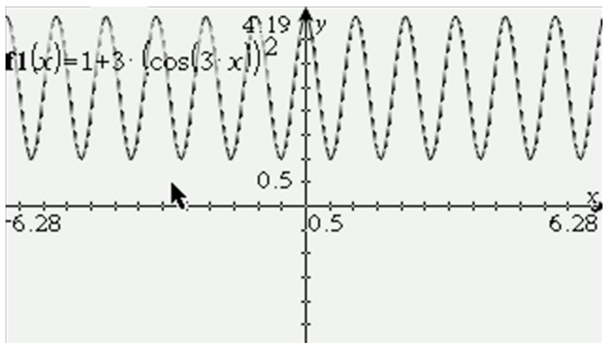


Figura 4.12 - Gráfico de *g(x)* na tarefa 1.2 b)

Depois de analisar melhor o gráfico, comentou "faz sentido que ele esteja todo positivo por causa do cosseno ao quadrado". Percebeu que devia achar o mínimo e o máximo da função. A Vera nesta fase dava sinais de estar a perceber algumas das dificuldades experimentadas na resolução algébrica. Contudo, revelava estar numa fase muito inicial do seu processo de génese instrumental com a máquina. Perguntou "e agora, para se ver melhor? não sei!". Curiosamente, referiu "isto era melhor se se fosse com os dedos e aumentasse, tipo *tablet*". Depois reparou que a escala do eixo dos yy lhe podia ser útil e afirmou, "é de 1 a 4, vou fazer à mão, já sei". Voltando ao papel, apercebeu-se sozinha que o erro era do enquadramento inicial e resolveu o exercício, comentando no final "já dá o que dá a máquina".

$$0 \leq \cos^2(3x) \leq 1$$
$$0 \leq 3\cos^2(3x) \leq 3$$
$$1 \leq 1 + 3\cos^2(3x) \leq 4$$

Figura 4.13 - Resolução analítica da tarefa 1.2 b)

A Vera apercebeu-se que a máquina a ajudaria a resolver a alínea b). Foi possível observar que a interação sujeito-instrumento evoluiu um pouco durante a resolução da tarefa, na medida em que a aluna procurou a calculadora para superar as dificuldades que encontrou durante a resolução algébrica. Entendeu que podia relacionar representações e que a máquina ia de encontro aos resultados que lhe faziam sentido. Criou uma estratégia para inserir o cosseno ao quadrado e avançou nos seus conhecimentos para encontrar os extremos da função. O mais sintomático deste facto, terá sido a aluna poder constatar que o gráfico se encontrava acima do eixo dos xx, o que favoreceu a compreensão de conceitos, esclarecendo a situação que surgiu durante a resolução em papel.

Notou-se serem importantes os comentários orais da aluna, que foram juntamente com as representações algébrica e gráfica, ajudando a construir o seu raciocínio. Com esta abordagem, a aluna conseguiu relacionar as representações e revelou indícios de ter avançado no processo de génese instrumental.

O Tomás

Na tarefa 1.3 pretendia-se saber os extremos de uma função e resolver uma equação trigonométrica.

Tarefa 1.3

a) Determine entre que valores varia a função $f(x) = 2 + sen(\frac{x}{2})$

b) Resolve a equação $f(2x) - 2 = -\frac{1}{2}$ no intervalo [0, 2 π]

Figura 4.14 - Enunciado da tarefa 1.3

O Tomás, depois de ler atentamente todo o enunciado, perguntou "isto tem a ver com as translações de funções, não é? Sobe duas unidades...". Lembrou-se de conteúdos programáticos do 10º ano que costumam ser estudados com o auxílio da calculadora gráfica.

Sugeriu de imediato a utilização da máquina. Utilizou a tecla *TAB* para inserir a expressão analítica da função, contudo confundiu os parênteses escrevendo *sen(x)/2*. Apercebeu-se do erro sem que nada lhe fosse dito. Lembrava-se de cometer esse erro em outras ocasiões, talvez por isso o tenha corrigido quase de imediato. Preocupou-se em verificar se estava a trabalhar com a máquina em modo radianos, acedendo às *definições* e confirmando. Ao ver o gráfico, associou 6,28 a duas vezes 3,14 , logo identificou os valores de π e 2π . Parecia estar à vontade com a máquina e em relacionar os dados que iam surgindo. Depois disse, "tem que se ver com atenção agora aqui no gráfico, quer dizer, vai-se por aqui ao *máximo* e *mínimo*", acedendo corretamente a *menu - analisar gráfico - mínimo* e depois *máximo.*

Enquadrou com facilidade os limites inferior e superior solicitados pela máquina. Encontrou os valores corretos e comentou, "vou confirmar, 3,14 é π e $sen(\frac{\pi}{2})$ é 1, faz sentido". Apresentou como resultado, a função a variar entre [1,3].

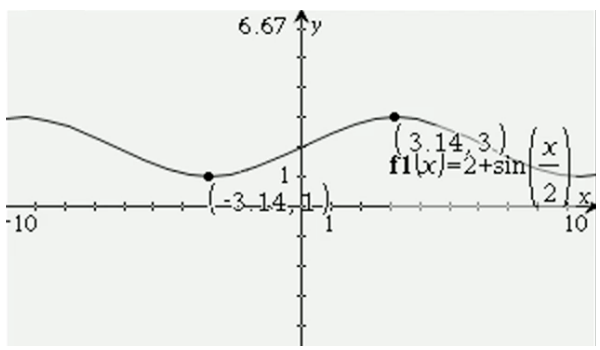


Figura 4.15 - Gráfico e extremos de *f(x)* na tarefa 1.3 a)

Na alínea b), percebeu que tinha de substituir x por $2x$ na função f. Fez as substituições algebricamente e concluiu "afinal é mais fácil, é só *sen(x)* $= -\frac{1}{2}$ "

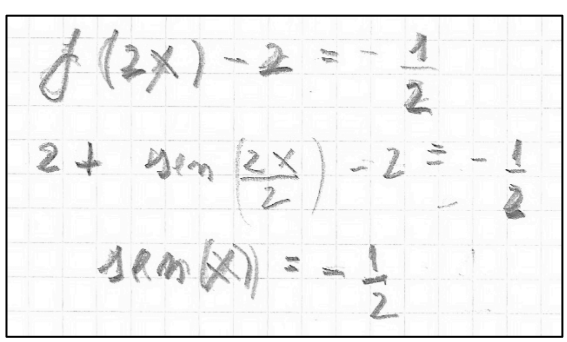


Figura 4.16 - Resolução analítica da tarefa 1.3 b)

O Tomás iniciou a sua resolução na folha, desenhando o círculo trigonométrico, mas parou. Perguntou "como é que faço isto na máquina? vou ver". Na calculadora inseriu no editor de funções $f_1(x)$= $sen(x)$. Ao visualizar o gráfico teve em conta apenas a parte positiva, não achou necessário ajustar a janela e rapidamente percebeu que tinha de inserir outra expressão analítica, perguntando "e se eu pusesse aqui uma reta $-\frac{1}{2}$?" .

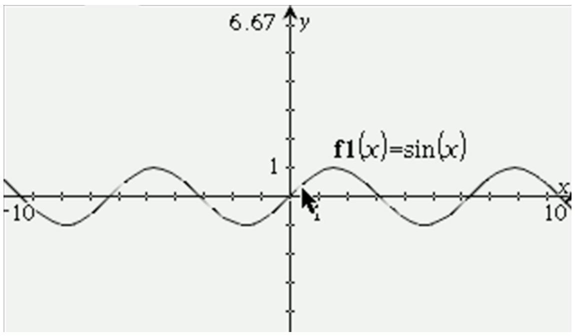


Figura 4.17 - Gráfico de *sen(x)* da tarefa 1.3 b)

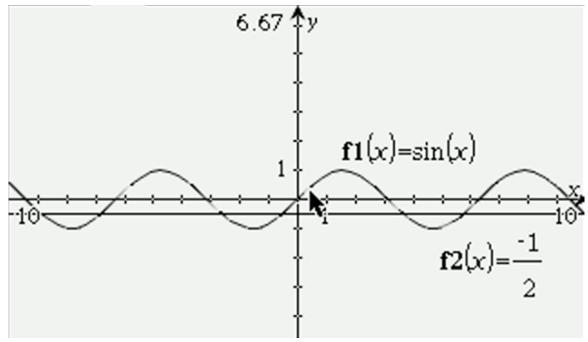


Figura 4.18 - Gráficos da tarefa 1.3 b)

Inseriu a expressão $f_2(x)$=$-\frac{1}{2}$ e achou os pontos de interseção, acedendo assertivamente aos menus.

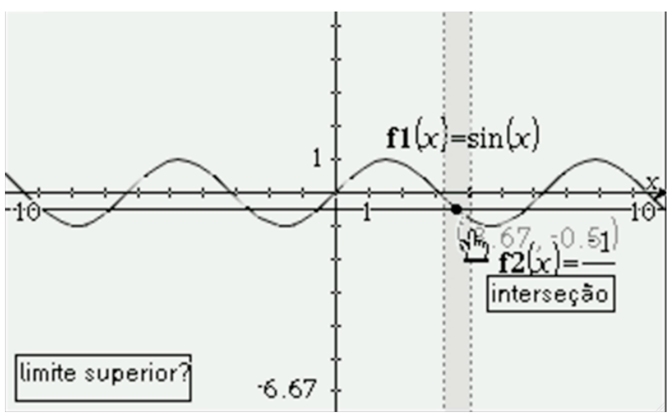


Figura 4.19 - Interseção de gráficos na tarefa 1.3 b)

Verificou através do gráfico que tinha duas soluções, lembrando-se que só lhe interessava o intervalo de [0, 2π] . Encontrou as soluções 3,67 e 5,76 através do *menu - analisar - gráfico - interseção*. Quando a máquina solicitou o valor inferior, afirmou "agora é esta parte", escolheu os limites na máquina sem dificuldade. Quis continuar o seu trabalho em papel e confirmar os valores através do círculo trigonométrico (figura 4.22). Assim o fez, confirmando os resultados com o auxílio da máquina em modo *rascunho*.

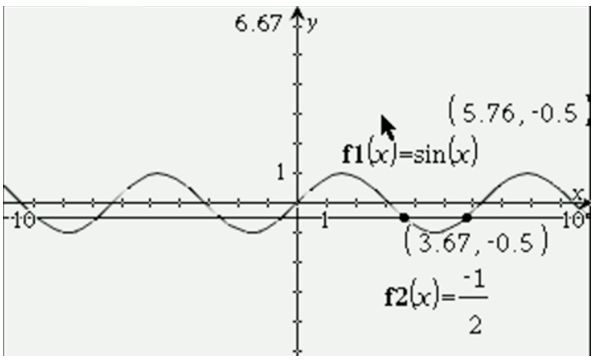


Figura 4.20 - Pontos de interseção na tarefa 1.3 b)

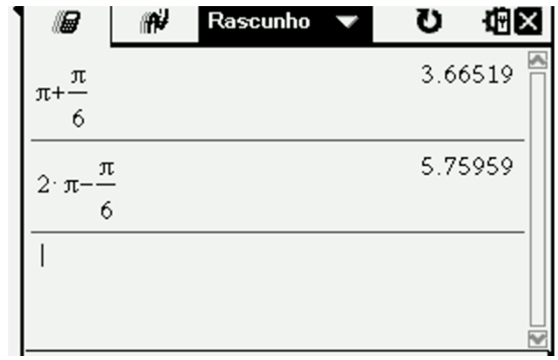


Figura 4.21 - Cálculos auxiliares na tarefa 1.3 b)

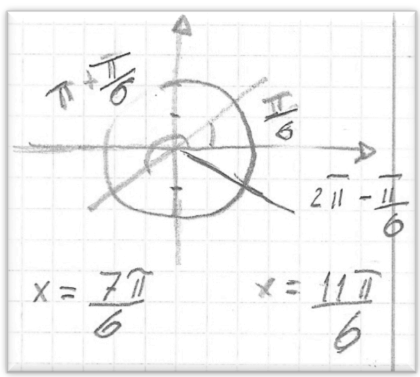


Figura 4.22 - Resolução analítica da alínea b da tarefa 1.3

O aluno relacionou diferentes métodos de resolução, conseguindo ultrapassar as dificuldades e fazendo conexões entre as várias representações, nomeadamente entre o círculo trigonométrico e os gráficos da calculadora. Compreendeu a escala numérica em radianos apresentada no referencial da máquina, associando-a corretamente aos seus registos.

Na primeira alínea, mostrou conhecer a diferença entre trabalhar algebricamente e graficamente, fazendo as comparações que achou úteis. A máquina auxiliou-o e reforçou a certeza das suas resoluções.

O Tomás demonstrou ter métodos interiorizados de utilizar a máquina de forma adequada às situações. Não se centrou só na resolução gráfica ou só na algébrica, mostrou facilidade em associar os esquemas instrumentais aos da compreensão algébrica, o que contribuiu para uma melhor compreensão do contexto da tarefa e sua resolução.

4.2.2. Desempenho dos alunos nas tarefas 2.1 e 2.2

O Danilo

Na tarefa 2.1 pretendia-se que o Danilo resolvesse uma inequação trigonométrica.

Tarefa 2.1

Resove a inequação $sen(x) \geq -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$

Figura 4.23 - Enunciado da tarefa 2.1

O aluno desenhou o círculo trigonométrico e auxiliando-se nos seus apontamentos foi verificar qual o ângulo cujo seno era $\frac{1}{2}$. Disse "$\frac{\pi}{6}$ é 30 graus, então é aqui em $\pi+\frac{\pi}{6}$ que temos $-\frac{1}{2}$". Com o esboço concluiu que o conjunto-solução da inequação seria $[0, \pi+\frac{\pi}{6}]$.

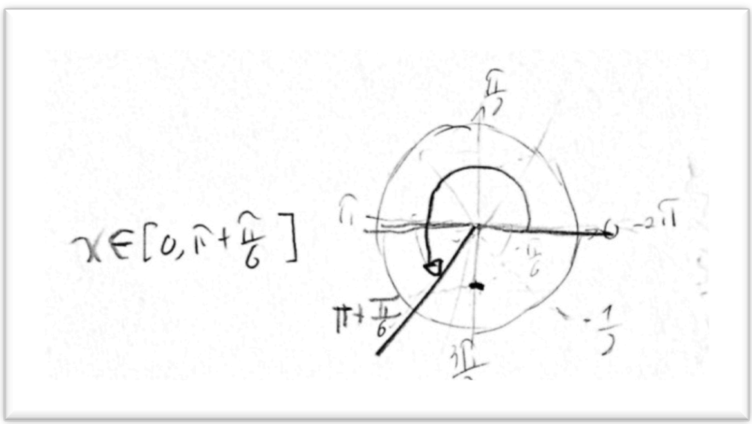


Figura 4.24 - Início da resolução da tarefa 2.1

O investigador questionou-o acerca da existência de outros ângulos cujo seno também fosse $-\frac{1}{2}$, ao que o aluno respondeu "há, é $-\frac{\pi}{6}$, mas já não pertence ao intervalo de $[0, 2\pi]$. Vou ver na máquina..." disse, pouco convicto.

No editor de funções inseriu $f_1(x)=sen(x)$, olhou para o gráfico obtido e achou melhor escolher o que chamou "janela trigonométrica". Acedeu a *menu - janela - zoom - trig*. Ao analisar o gráfico obtido (figura 4.25), associou 6,28 a 2π, por isso fez-lhe sentido analisar a parte positiva do eixo das abcissas.

Disse *"agora falta ver onde está acima de - 0,5 "*. Introduziu por iniciativa própria uma nova função no editor de equações $f_2(x) = -0,5$.

Ao analisar o gráfico, reparou que existia mais um ponto de interseção. Disse "este primeiro é $\pi + \frac{\pi}{6}$ e o outro não é negativo porque é só um bocado antes do 6,28". Olhou novamente para o seu círculo trigonométrico, não voltou a escrever mais, mas disse: "já sei é $2\pi - \frac{\pi}{6}$, assim já é positivo" e acrescentou as soluções são de $[0, \pi + \frac{\pi}{6}]$ reunidas com $[2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi]$, assim está tudo dentro do intervalo de $[0, 2\pi]$".

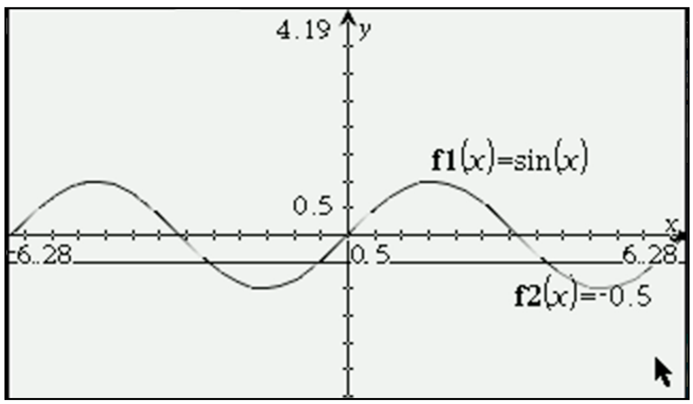


Figura 4.25 - Gráficos da tarefa 2.1

Curiosamente, não se preocupou em efetuar os cálculos de $\pi + \frac{\pi}{6}$ nem de $2\pi - \frac{\pi}{6}$, nem tão pouco encontrar os pontos de interseção dos gráficos e de confirmar os valores obtidos. A resolução estava a fazer-lhe sentido assim, e notava-se que estava satisfeito com o resultado e com o facto de ter entendido o exercício. Achou as contas desnecessárias. O investigador alertou o aluno para o facto de dever transcrever e comparar os resultados obtidos através do círculo trigonométrico com os obtidos na calculadora.

Foi notório que a análise gráfica e a associação das representações, quer numéricas (através da comparação graus - radianos), quer do círculo trigonométrico, contribuíram para a construção do raciocínio que o aluno verbalizou. Embora não tivesse tirado partido de todas as potencialidades da máquina, criou um esquema que lhe permitiu chegar à resposta correta, onde a calculadora gráfica teve um papel importante.

A Vera

A Vera estava ligeiramente mais adiantada no programa curricular, por isso o exercício era um pouco mais exigente que o do Danilo. A aluna teria de encontrar a solução da conjunção de duas condições envolvendo funções trigonométricas.

Tarefa 2.2

Encontra os valores de x ∈ [0, 2π] para os quais $sen(x) \geq \frac{1}{2} \wedge \cos(x) \leq 0$

Figura 4.26 - Enunciado da tarefa 2.2 - Vera

Numa primeira fase, procurou ângulos de [0, 2π] cujo seno e o cosseno fossem $\frac{1}{2}$ e 0, respetivamente. Desenhou um círculo trigonométrico e expôs o seu raciocínio em voz alta "o cosseno é negativo no 2º e 3º quadrantes, mas queremos o seno maior que um meio". Escreveu de imediato x pertence de [$\frac{\pi}{2}$, ?] ..." agora não sei, acho que é $\pi - \frac{\pi}{6}$; vou ver o gráfico".

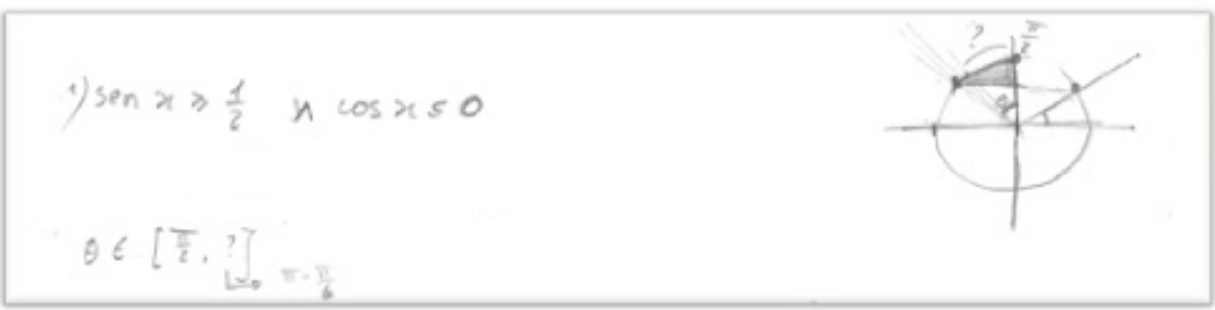


Figura 4.27 - Resolução da tarefa 2.2 - Vera

Na máquina inseriu com alguma destreza $f_1(x)=sen(x)$; $f_2(x)=\frac{1}{2}$ e $f_3(x)=cos(x)$. Disse "ser desnecessário inserir f_4 porque era o eixo dos xx". Procurou *zoom - trig* no *menu - janela* e analisou os gráficos que a máquina apresentou.

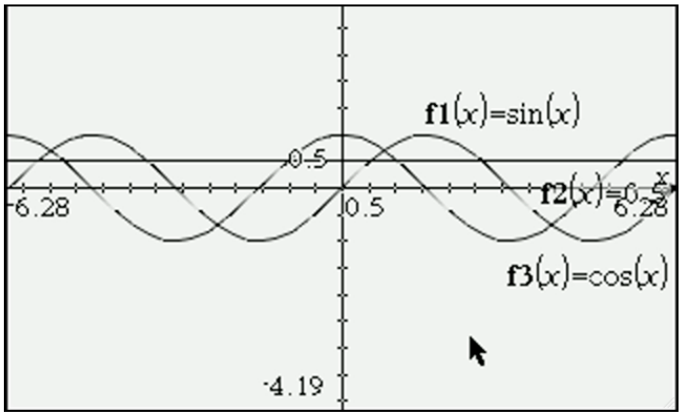


Figura 4.28 - Gráficos da tarefa 2.2 - Vera

A vera apercebeu-se que precisava encontrar o $\frac{\pi}{2}$ no eixo do xx , e apontou para o primeiro zero positivo da função cosseno (figura 4.28). Disse, "este não é preciso calcular, já sabemos que só pode ser o $\frac{\pi}{2}$". Copiou a parte do gráfico que achou relevante para o seu caderno, apontou o $\frac{\pi}{2}$ a que se referia e marcou outro ponto de interseção que achou importante (figura 4.29). Disse "agora vou achar este" - onde colocou um ponto de interrogação".

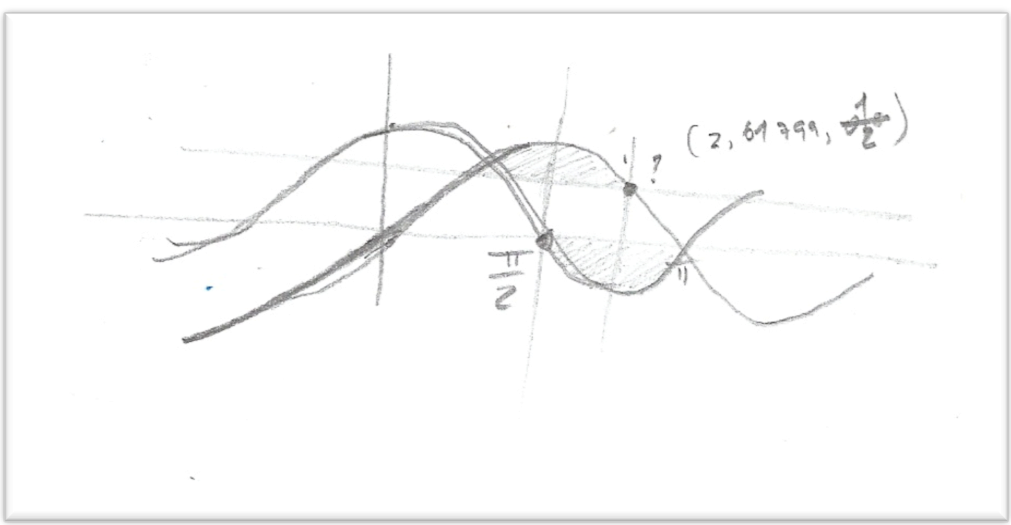


Figura 4.29 - Resolução da tarefa 2.2

Na máquina, acedeu a *menu - analisar gráfico - interseção*, escolheu corretamente os gráficos do *seno* e de $y=\frac{1}{2}$ e escolheu os limites *inferior* e *superior* sem necessitar de ajuda.

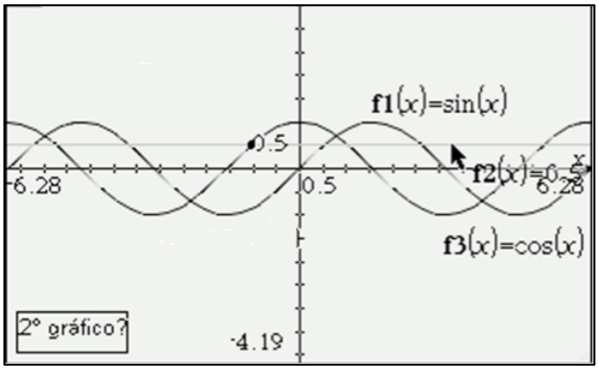


Figura 4.30 - Resolução gráfica da tarefa 2.2 - Vera

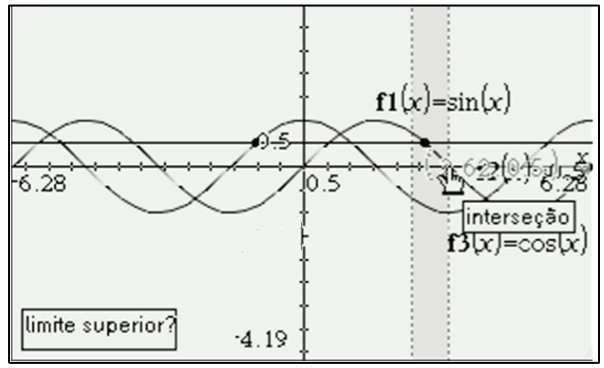


Figura 4.31 - Interseção dos gráficos na tarefa 2.2 - Vera

Encontrou o valor arredondado 2.62 e quase de imediato na máquina em modo rascunho calculou $\pi-\frac{\pi}{6}$. Disse "dá 2.617, é do arredondamento". Apresentou a solução de [$\frac{\pi}{2}$, $\pi-\frac{\pi}{6}$], voltando a fazer referência a 2.62.

A Vera articulou diferentes representações e transcreveu para o seu caderno as conclusões que foi confirmando. As representações complementaram-se e melhoraram a sua capacidade de resolver este género de tarefas. A máquina foi importante para perceber quais os pontos mais relevantes. Não serviu apenas de confirmação, mas como um auxiliar eficiente. A aluna mostrou ter adquirido destrezas para usar a máquina de forma a esta ter um valor funcional e significativo na procura dos seus objetivos, o que a ajudou na compreensão dos conteúdos. Revelou ter evoluído no seu processo de génese instrumental com a calculadora gráfica.

O Tomás

O Tomás encontrava-se na mesma parte do programa curricular que a Vera. Por análise do caderno diário, concluiu-se que seria adequado ambos realizarem a mesma tarefa. As suas professoras sugeriam frequentemente este género de exercícios como trabalho de casa.

Tarefa 2.2

Encontra os valores de $x \in [0, 2\pi]$ para os quais $sen(x) \geq \frac{1}{2} \wedge \cos(x) \leq 0$

Figura 4.32 - Enunciado da tarefa 2.2 - Tomás

O Tomás, partiu logo para a resolução da tarefa, explicando o seu raciocínio em voz alta, ao mesmo tempo que ia desenhando num círculo trigonométrico que representou no papel (figura 4.33), " o $sen(\frac{\pi}{6})$ é $\frac{1}{2}$ e o $sen(\frac{5\pi}{6})$ também é $\frac{1}{2}$, logo é esta parte de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$." Fez mentalmente o cálculo $\pi - \frac{\pi}{6}$. Estava habitado a fazê-lo nas aulas. Foi-lhe questionado pelo investigador se não tinha que analisar a outra condição, ao que ele respondeu "claro! O cosseno só é negativo no 2º e 3º quadrantes". Pensou um pouco, analisou melhor o seu apontamento e disse "é a parte não sublinhada de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{5\pi}{6}$" (figura 4.33). Excluiu o $\frac{\pi}{2}$, facto para o qual o investigador lhe chamou a atenção. Ele concordou "claro, se o cosseno é menor ou igual, também pode ser igual".

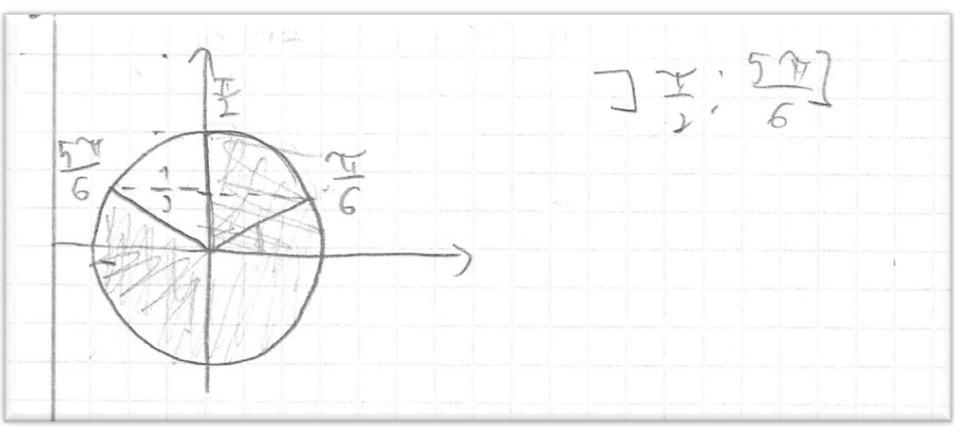


Figura 4.33 - Resolução da tarefa 2.2 - Tomás

O Tomás surpreendeu com a pergunta, "seria mais rápido com a máquina?", quis experimentar. No editor de equações, sabia que apagando o sinal de igual conseguia inserir os sinais de desigualdade. Tentou escrever $sen(x) \geq \frac{1}{2}$, mas a máquina corrigia para $y \geq \frac{1}{2}$. Exclamou, "não dá! Vou chamar $y=sen(x)$". Mas a máquina voltou a dar erro (figura 4.34). Disse "Não dá para resolver assim, vou meter as funções normalmente, $f_1(x)=sen(x)$, mas esta vou mudar para $y \geq \frac{1}{2}$". Continuou, digitando $f_2(x)=cos(x)$ e acrescentando $y \leq 0$ (figura 4.35). Analisou os gráficos com os semiplanos representados.

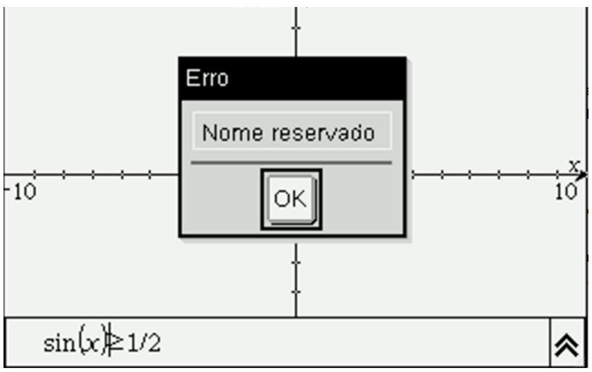


Figura 4.34 - Erro na máquina na tarefa 2.2 - Tomás

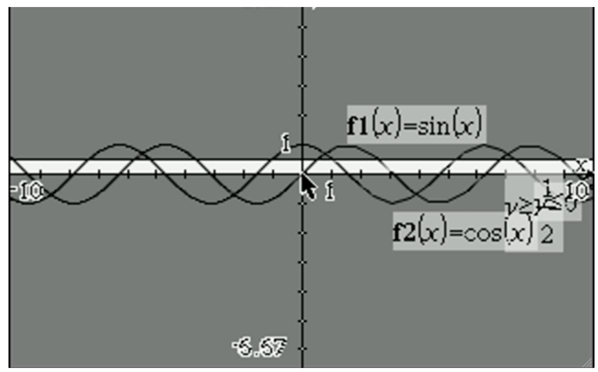


Figura 4.35 - Gráficos da tarefa 2.2 - Tomás

Aproximou o gráfico através de *menu - janela - zoom - trig* e fez a *interseção* para encontrar o ponto que já tinha determinado anteriormente no caderno pela análise do círculo trigonométrico. Obteve 2,62. No modo *rascunho* confirmou que se tratava de $\pi - \frac{\pi}{6}$, arredondado. Respondeu é de $\frac{\pi}{2}$ *a* $\frac{5\pi}{6}$ fechado, como dizia".

Figura 4.36 - Rascunho na resolução da tarefa 2.2 - Tomás

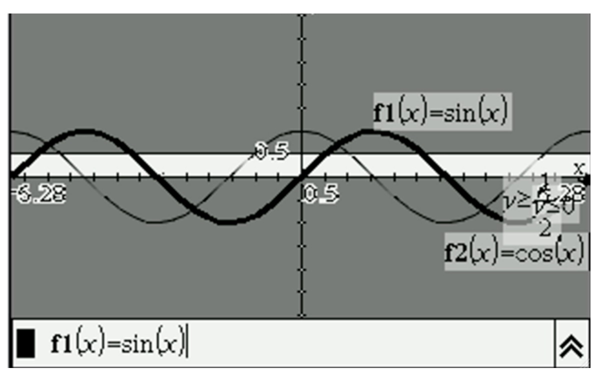


Figura 4.37- Gráficos da tarefa 2.2 - Tomás

O aluno alternou a seleção das funções no editor para visualizar e realçar melhor as interseções que lhe eram relevantes. Selecionou o gráfico de f_1 e de f_2 (figura 4.38) e encontrou o ponto de interseção do gráfico de f_1 *com a reta de equação y*=0,5 *(*figura 4.39).

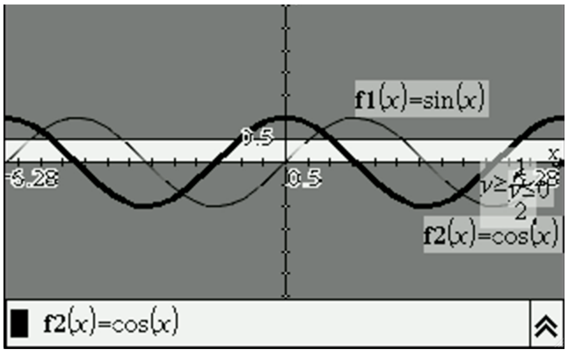


Figura 4.38 - Gráficos da tarefa 2.2 - Tomás

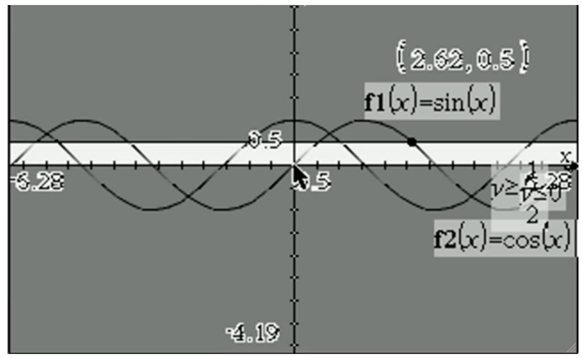


Figura 4.39- Interseção de gráficos da tarefa 2.2 - Tomás

O Tomás por distração ou talvez por excesso de confiança, precipitou-se na resposta inicial. Contudo, depois da intervenção do investigador, entendeu o exercício e resolveu-o corretamente de forma analítica no seu caderno com o auxílio do círculo trigonométrico.

Foi interessante a forma como o aluno tentou encontrar processos na máquina para resolver as inequações, elaborando esquemas mentais e instrumentais que implicavam a introdução dos sinais de desigualdade e tentavam contornar as mensagens de erro que a máquina apresentava. Mais do que adaptar a máquina aos seus objetivos, deparando-se com as suas limitações, desenvolveu esquemas mentais que foram sendo atualizados e modificados conforme as experiências que fazia. Foi evidente que a apropriação das propriedades internas da máquina ajudou a desenvolver as capacidades cognitivas do aluno.

No fim, achou importante a representação gráfica dos semiplanos e percebeu que poderiam ser úteis em outros exercícios. Embora tivesse entendido o registo de representação no círculo trigonométrico, foi importante descobrir uma outra representação no registo dinâmico da calculadora, para assim diversificar e aperfeiçoar o seu pensamento. Embora as mensagens de erro o tenham deixado insatisfeito, conformou-se, e tirou partido do que conseguiu realizar com a máquina. De salientar a constatação do desenvolvimento do seu processo da génese instrumental, importante para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

4.2.3. Desempenho dos alunos na tarefa 3

A tarefa 3 (Anexo VI) foi aplicada no decorrer do segundo período. Nesta fase, os alunos, aparentemente, apresentavam maior agilidade na utilização da máquina. Já tinham terminado a abordagem ao capítulo de geometria e estavam a estudar o tema das funções. A tarefa proposta consistia numa adaptação de um exercício de um exame nacional do ano de 2000.

Tarefa 3

Considere a função f de domínio IR definida por $f(x) = 2x - \cos(x)$

Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma reta r, cuja inclinação é 45º, que contém o ponto A(-3,0) e que interseta o gráfico da função f no ponto B.

a) Determina a equação reduzida da reta r

b) Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades

(adaptado - exame nacional 2000)

Figura 4.40 - Enunciado da tarefa 3

O Danilo

Inicialmente o Danilo não estava a recordar-se de como determinar o declive da reta que lhe era solicitado. Após a intervenção do investigador, recordando que devia pensar na tangente trigonométrica da inclinação (figura 4.41). Disse "já sei, já me lembro." Fez os cálculos necessários para determinar o declive, *lembrando-se que* $tg(45º)=1$*.* Posteriormente, encontrou a ordenada na origem b, substituindo corretamente na equação $y=x+b$, as coordenadas (-3, 0) do ponto A.

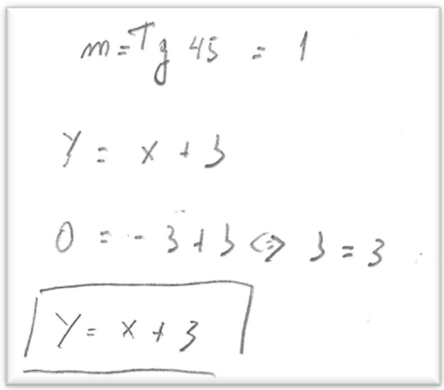


Figura 4.41 - Resolução da tarefa 3 a) - Danilo

Para a resolução da alínea b) começou por fazer um esboço do triângulo, omitindo o referencial e os gráficos.

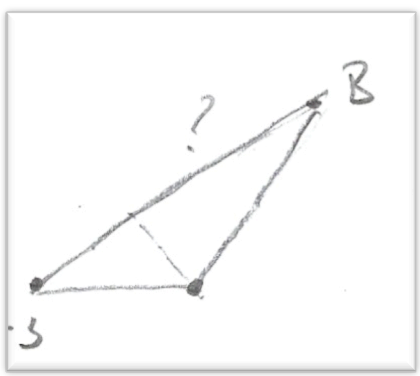


Figura 4.42 - Triângulo da tarefa 3 b) - Danilo

Talvez por isso, não tivesse escolhido a melhor opção para base onde colocou um ponto de interrogação (figura 4.42).

Após a intervenção do investigador chamando a atenção para os gráficos no referencial e depois de analisar melhor o enunciado, o aluno colocou o ponto de interrogação na altura do triângulo [AOB] (figura 4.43), considerando como base [AO].

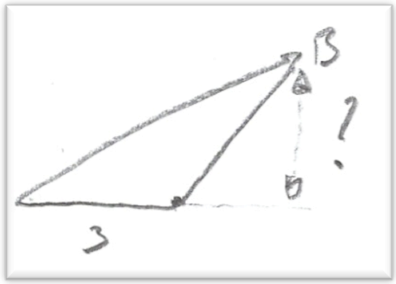


Figura 4.43 - Identificação de elementos no triângulo da tarefa 3 b) - Danilo

Posto isto, afirmou, "para saber a altura, preciso de saber a ordenada do ponto B - vou descobrir a interseção da reta com a função". Escreveu $f(x)=x+3$ e perguntou "agora meto na máquina?". Ao questionar o aluno sobre qual era a função $f(x)$, o Danilo apontando para a expressão analítica da função *f do enunciado,* escreveu $2x - \cos(x) = x+3$ (figura 4.44).

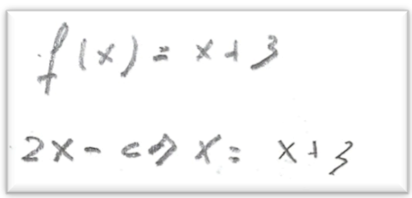


Figura 4.44 - Resolução da tarefa 3 b) - Danilo

Disse "agora é que meto na máquina". Lentamente fez os passos corretos, editando as funções $f_1(x)=2x-\cos(x)$ e $f_2(x)=x+3$, acedendo a *menu - analisar gráfico - interseção* e limitando o ponto que pretendia encontrou (2,32; 5,32). Notava-se maior à vontade no manuseamento da máquina e das suas funções. Arrastou as coordenadas para um lugar visível do ecrã (figuras 4.45 e 4.46).

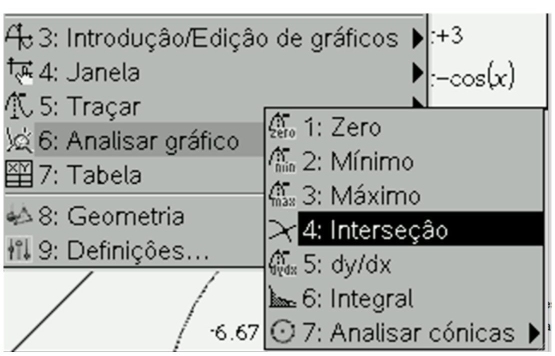


Figura 4.45 - Menus da resolução gráfica da tarefa 3 b)

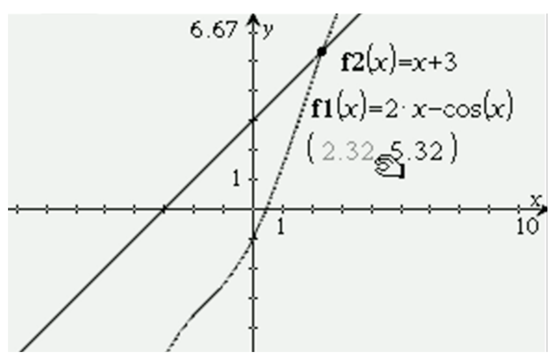


Figura 4.46- Interseção dos gráficos da tarefa 3 b) - Danilo

A partir daqui não teve dificuldade em encontrar a área do triângulo. Disse "base vezes a altura sobre dois" e escreveu no seu apontamento, o resultado final 8 (figura 4.47). Ao ser alertado para o facto de os arredondamentos deverem ser feitos no final, o Danilo afirmou "sim, para termos um valor mais exato", contudo não viu necessidade de voltar a fazer os cálculos. Considerou o resultado encontrado satisfatório, pois confiava na sua resolução.

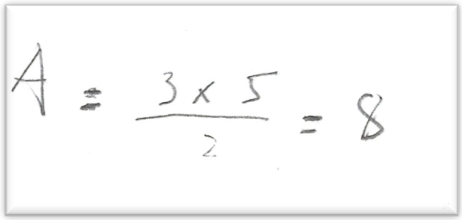


Figura 4.47 - Resultado final da tarefa 3 b) - Danilo

Embora não se recordasse da definição de declive e não tivesse escolhido a base mais adequada para o triângulo que lhe permitisse a resolução do exercício, o Danilo, superadas estas contrariedades, foi construindo a sua resolução de forma congruente. Percebeu que procedimentos deveria realizar para encontrar a altura do triângulo e reconheceu o papel que a máquina poderia desempenhar na resolução do problema.

O seu registo em desenho foi fundamental para conseguir continuar a resolução do problema. Articulou razoavelmente as representações e usou a máquina de forma eficaz. Aperfeiçoou o seu próprio pensamento algébrico ao interpretar corretamente a figura e perceber que conseguia relacionar as suas interpretações com as representações obtidas na calculadora, chegando assim com sucesso à solução do problema proposto.

A Vera

Na alínea a) da tarefa (figura 4.40), a Vera começou por escrever no seu caderno a equação reduzida da reta na forma genérica $y=mx+b$, contudo escreveu $m=\frac{\pi}{4}$ e substituiu $y=(\frac{\pi}{4})x+b$. Estranhando o que acabara de escrever, disse "isto não é assim, o m é tangente de $\frac{\pi}{4}$". Realizou os cálculos mentalmente, confirmou na máquina o resultado, $tg(\frac{\pi}{4})=1$ e substituindo as coordenadas do ponto A na equação reduzida da reta, chegou à equação pretendida da reta r , $y=x+3$ (figura 4.48) .

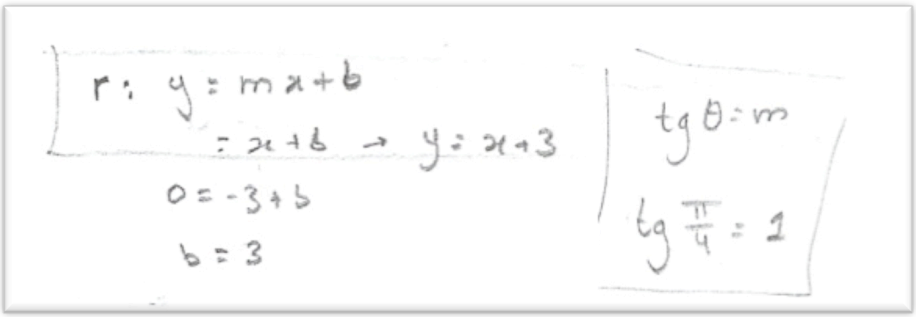


Figura 4.48 - Resolução da tarefa 3 a) - Vera

Na alínea b), para visualizar melhor qual era o triângulo [AOB] pedido, fez um esboço do gráfico no seu caderno, assinalando a ordenada na origem $b=3$ no seu gráfico. Parecia-lhe que poderia ser útil. Percebeu depois que não, ao analisar melhor o triângulo. Disse "tenho de descobrir é este ponto B, para saber a altura do triângulo".

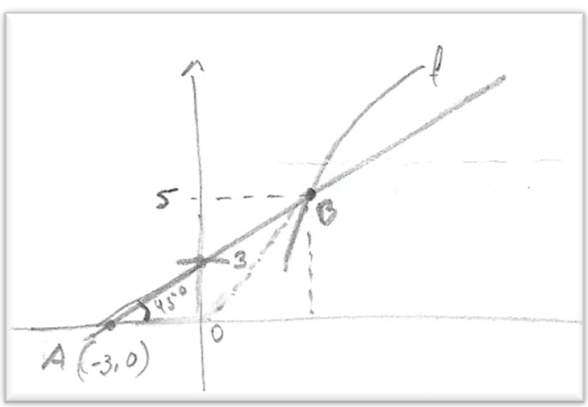


Figura 4.49 - Resolução da tarefa 3 b) - Vera

Escreveu $2x\text{-}cos(x)\text{=}x\text{+}3$ e perguntou "como é que resolvo isto?". Foi-lhe sugerido que lê-se atentamente o enunciado. Assim fez e no final afirmou "Igualo as funções na máquina".

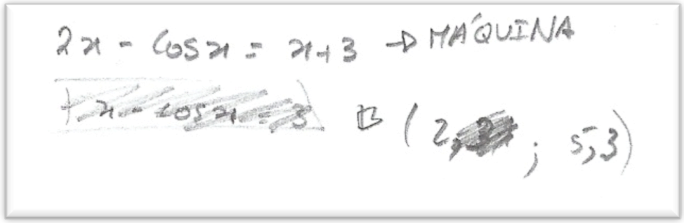


Figura 4.50 - Resolução da tarefa 3 b) - Vera

Na máquina, inseriu através do editor de funções $f_1(x)\text{=}2x\text{-}cos(x)$ e $f_2(x)\text{=}x\text{+}3$. Acedeu a *menu - analisar gráfico - interseção* e encontrou o ponto (2,32; 5,32) após enquadrar os limites inferior e superior solicitados pela máquina. No caderno arredondou para (2; 5,3) (figuras 4.51 e 4.52).

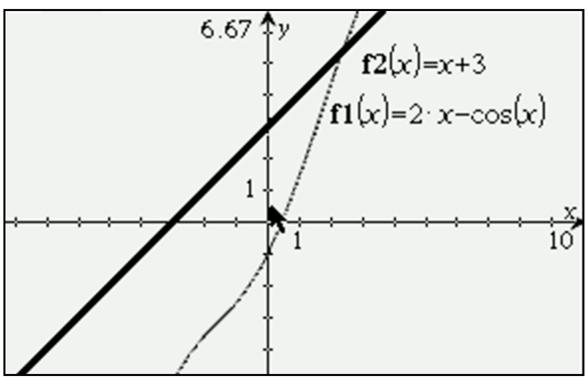


Figura 4.51 - Gráficos da tarefa 3 b) - Vera

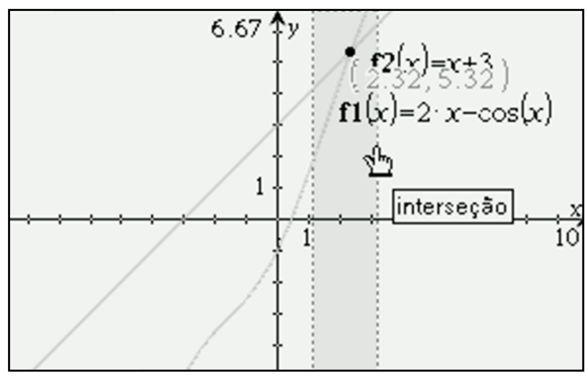


Figura 4.52 - Interseção de gráficos na tarefa 3 b) - Vera

Foi necessário chamar a atenção à Vera para o facto de o arredondamento só dever ser realizado no final, bem como o facto de que ela devia ver melhor qual a coordenada do ponto encontrado que lhe seria útil. Refletiu e disse "para a altura, é a ordenada que interessa!". Tinha escrito também 5 no seu desenho, nos cálculos apresentou o valor 5,3. Chegou à conclusão que a área pretendida era aproximadamente 8 (figura 4.53).

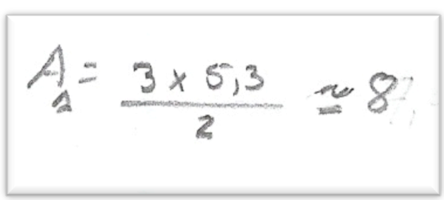


Figura 4.53 - Cálculos finais da tarefa 3 b) - Vera

Apesar das suas resoluções não serem clarividentes, denotando alguma confusão na análise dos dados, a Vera transcreveu cuidadosamente no caderno os seus passos, de forma a entender o pretendido e a identificar os passos essenciais para avançar na sua resolução, ainda que por vezes com ajuda.

A dificuldade inicial na representação numérica na determinação do declive indicia alguma confusão em associar conteúdos programáticos de temas diferentes, contudo o facto de se ter apercebido apenas pelo aspeto visual do seu registo que algo estaria errado, levou-a a reformular o início da resolução e a uma melhor compreensão inicial do problema.

Esperava-se que a aluna conseguisse perceber sozinha que a solução para o seu problema passaria pela utilização da máquina. Talvez por estar muito focada nos seus registos em suporte papel, não foi este o caso. Quando percebeu que tinha de usar a máquina, mostrou eficiência, contudo não se pode dizer que o seu processo de génese instrumental se revelasse totalmente eficaz, pois não percebeu de imediato que a máquina era o instrumento mediador para o seu objetivo. No final, entendeu que mais do que um auxiliar, a máquina era imprescindível para resolver a tarefa proposta.

O Tomás

Para determinar o declive da reta mencionada na alínea a) (figura 4.40), o Tomás percebeu de imediato que teria que calcular a tangente de 45 graus. Usou a máquina para esse efeito, e depois dos devidos cálculos de substituição de $(x, y)=(-3,1)$ (figura 4.54), concluiu sem dificuldade que a equação reduzida da reta r , era $y=x+3$. O investigador alertou-lhe que devia ter atenção aos parêntesis na apresentação da resposta, ao que o aluno respondeu "sim, senão fica 1 menos 3 e não 1 vezes 3".

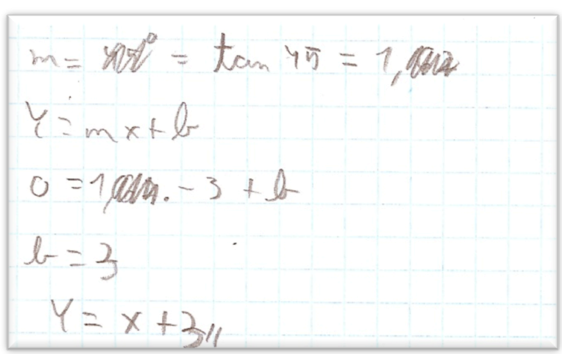


Figura 4.54 - Resolução da tarefa 3 a) - Tomás

Inicialmente, hesitou relativamente à base do triângulo que escolheria, mas analisando com mais cuidado a figura do enunciado, apercebeu-se qual a melhor opção e afirmou "é 3, agora a altura é preciso descobrir a ordenada do ponto B". De seguida escreveu o problema sobre a forma de um sistema de equações (figura 4.55) e executou mais alguns passos na resolução do sistema. A dada altura, deparou-se com a equação $cos(x) = x\text{-}3$. Perguntou retoricamente, "como é que se resolve?" E sem que o investigador se pronunciasse, ele próprio respondeu "só com a máquina".

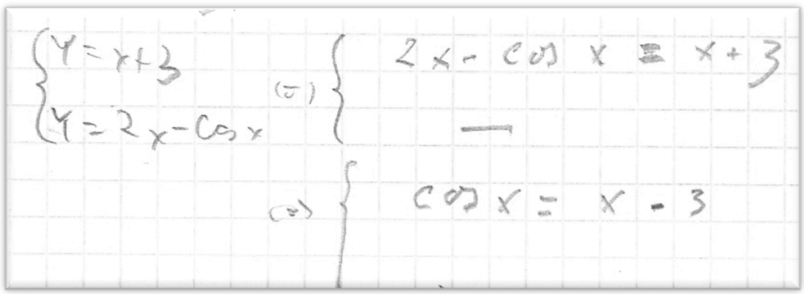


Figura 4.55 - Resolução da tarefa 3 b) - Tomás

Inseriu no editor de funções da calculadora $f_1(x)=cos(x)$ e $f_2(x)=x\text{-}3$. Visualizou os gráficos e descobriu facilmente o ponto de interseção, acedendo naturalmente e rapidamente a *menu - analisar gráfico - interseção* e escolhendo os limites superiores e inferiores adequados (figura 4.57).

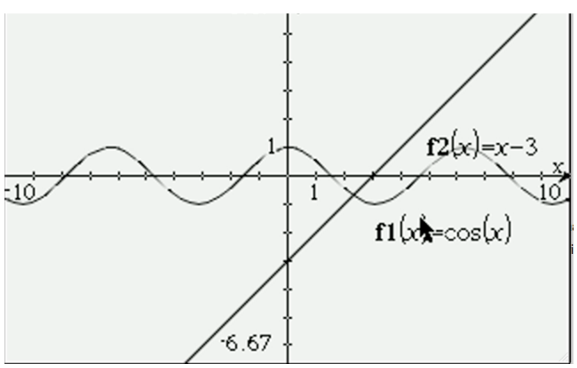


Figura 4.56 - Gráficos da resolução 3 b) - Tomás

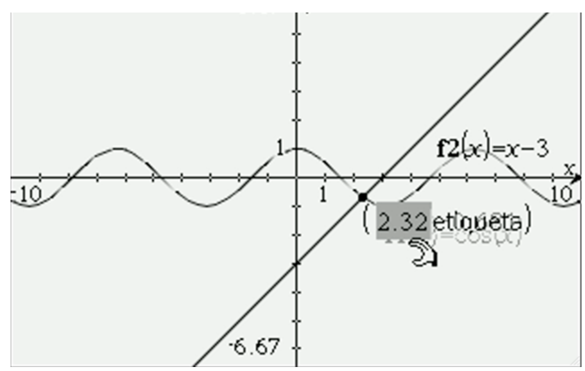


Figura 4.57- Interseção dos gráficos da tarefa 3 b) - Tomás

Encontrou o ponto cuja a abcissa era 2,32, arredondou para 2 e fez a substituição mentalmente na equação do seu sistema inicial, dizendo "agora na reta $y=x+3$, se o x é 2, o y é 5" .

Marcou o valor 5 como a altura do triângulo que entretanto tinha desenhado (figura 4.58). Fez os cálculos e apresentou o valor 8 para a área do triângulo [AOB].

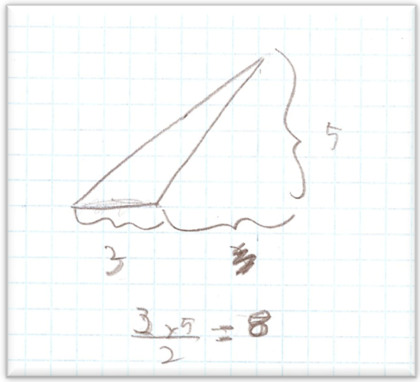


Figura 4.58 - Resolução final da tarefa 3 b) - Tomás

O Tomás não teve dificuldade em encontrar a equação da reta. O caminho que escolheu através da resolução do sistema podia ter causado dificuldades algébricas que não conseguiria ultrapassar, contudo manteve a coerência do seu raciocínio e substituiu corretamente o valor encontrado na máquina para determinar a solução do sistema. Percebeu que sem a máquina, a resolução da tarefa poderia ficar comprometida. Revelou assim destreza ao lidar com a máquina e ao relacionar as diferentes representações, alternando-as e comparando-as sempre que necessário. Percebeu que a desvantagem da representação algébrica podia ser suprimida através de outras representações, nomeadamente a gráfica, utilizando as capacidades da máquina.

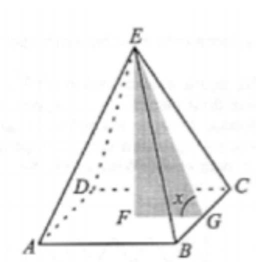
O aluno revelou estar numa fase mais adiantada do seu processo de génese instrumental, não só porque atribuía as funções adequadas à máquina para atingir os seus objetivos, mas sobretudo porque esta tinha sido apropriada pelo aluno de modo a ser um verdadeiro instrumento mediador da sua atividade e construção de esquemas de utilização que conduziram à compreensão dos conteúdos inerentes à tarefa.

4.2.4. Desempenho dos alunos na tarefa 4

A tarefa 4 (Anexo VII) foi aplicada aos alunos numa data mais próxima do exame intermédio nacional. Trata-se de uma adaptação de um exercício de um exame nacional de 2001.

Tarefa 4

Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular em que *x* designa a amplitude do ângulo FGE



A área total da pirâmide é dada em função de x por:

$$A(x) = \frac{4\cos(x) + 4}{\cos(x)} \qquad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Use a calculadora gráfica para resolver o seguinte problema: o que acontece a *A*(*x*) quando *x* se aproxima de $\frac{\pi}{2}$

Interprete geometricamente o valor obtido.

(adaptado - exame nacional 2001)

Figura 4.59 - Enunciado da tarefa 4

Nesta altura do ano letivo, os alunos estudavam o capítulo das funções. Conheciam as noções de assimptota e de limite de uma função. Com esta tarefa, pretendia-se que, partindo de conceitos de trigonometria, os alunos associassem noções de geometria no espaço com propriedades de funções, de forma a investigar que uso fariam da calculadora gráfica numa situação destas.

Na tarefa 4 era pedido para interpretar geometricamente a questão do que aconteceria à área total da pirâmide quando x se aproximava de $\frac{\pi}{2}$. O enunciado sugeria a utilização da calculadora gráfica. Desejava-se que os alunos concluíssem algo semelhante a que *a área pode ser tão grande quanto se quer, desde que o ângulo se aproxime do ângulo reto*.

O Danilo

O Danilo, primeiro substituiu o x por $\frac{\pi}{2}$ na expressão $A(x)$ e obteve o resultado *4* a dividir por *0.* Depois, utilizando a máquina em modo rascunho, inseriu $\frac{4}{0}$, e deu conta que a máquina lhe devolvia a informação *undef.*, comentou, "isto é impossível". A partir daí, tentou explicar o seu raciocínio dizendo que não era bem por zero que devia dividir o quatro porque "quando x tende para $\frac{\pi}{2}$, não chega ser $\frac{\pi}{2}$". Em modo rascunho, dividiu 4 por 0,1; 4 por 0,01; 4 por 0,001 e assim sucessivamente, concluiu afirmando "isto vai aumentando, tende para infinitos" (figura 4.60).

Posteriormente, achou por bem analisar o gráfico, inserindo a expressão de $A(x)$ no editor de funções da calculadora, contudo não conseguiu associar o resultado obtido na calculadora (figura 4.61), disse "não se consegue ver". Terminou dizendo "eu respondia que quando o x se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, a área vai aumentando". Depois olhando para a figura do enunciado acrescentou "mas nunca chega a ser um paralelepípedo".

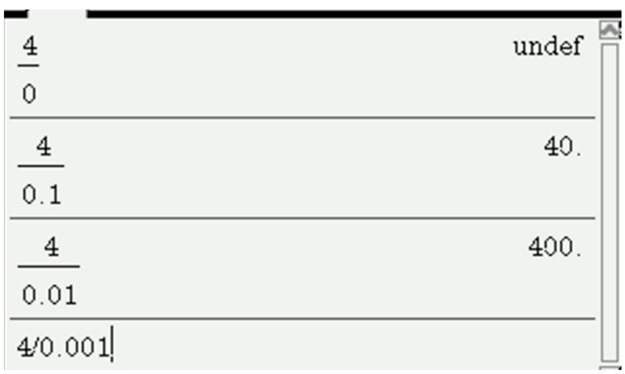


Figura 4.60 - Cálculos na tarefa 4 - Danilo

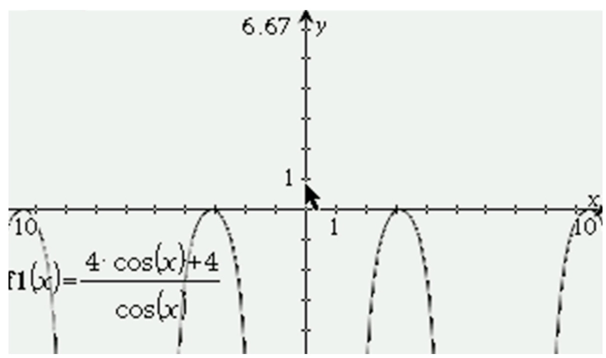


Figura 4.61 - Gráfico de *A(x)* na tarefa 4 - Danilo

O Danilo, de forma dedutiva encontrou uma solução para o problema, não através do gráfico, mas através de um raciocínio no qual a máquina serviu praticamente para cálculos auxiliares.

Não fez uma associação entre a figura representada no enunciado e a representação gráfica obtida na calculadora, pois não procurou Assimptotas nem analisou limites. Revelou não ter associado a esses conteúdos programáticos ao gráfico que observou na máquina.

Pela análise do percurso do aluno, depreendia-se que este pudesse ser capaz de examinar melhor o gráfico, contudo revelou dificuldades em identificar os dados fornecidos pela calculadora. Não associou que a calculadora podia sugerir resultados diferentes do que estaria à espera e que podia mostrar apenas parte do gráfico da função.

Apesar de não mostrar grande vontade de investigar na calculadora, a verdade é que dificilmente concluiria o mesmo resultado se não utilizasse a máquina no seu modo apenas científico para efetuar os cálculos iniciais inerentes à noção de limite.

De uma forma geral, poder-se-á concluir que com a introdução de conceitos matemáticos mais globais, as técnicas instrumentais que o aluno aprendeu a aplicar para um determinado conteúdo programático não se revelaram producentes em termos de eficiência instrumental.

A Vera

A Vera, depois de ler o enunciado da tarefa 4, disse de imediato "é meter a área na máquina". Inseriu a expressão de $A(x)$ na máquina, através do editor de funções, mas numa primeira análise não chegou a nenhuma conclusão pela visualização do gráfico. Não tinha definida uma janela adequada. Contudo, não desistiu, explicando o seu raciocínio em voz alta "cosseno de $\frac{\pi}{2}$ é zero, e dá 4 sobre zero, isto tem a ver com assimptotas, não tem? Vou ver melhor à máquina". Acedeu a *menu - janela definições de janela* e aumentou o valor de *Y Máx* para praticamente o dobro, 40 (figura 4.62). Desta forma, conseguiu ver a parte do gráfico acima do eixo dos xx e concluiu, "pronto, a área máxima é mais infinito".

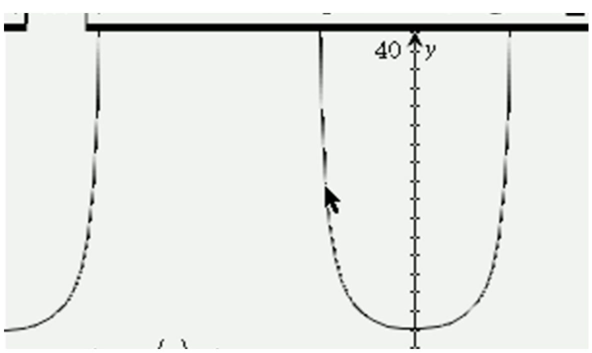


Figura 4.62 - Gráfico de *A(x)* na tarefa 4 - Vera

A Vera não se preocupou em analisar com pormenor a assimptota vertical para $x = \frac{\pi}{2}$, procurou através da máquina aquilo que já tinha esquematizado mentalmente. Pode-se considerar que fez uma conversão correta da sua representação analítica para a representação gráfica. Mostrou indícios de ter entendido parte da tarefa, mas não revelou clarividência de resposta no contexto do problema.

A aluna adaptou a máquina às suas necessidades, atribuiu-lhe um objetivo e soube-a manusear de modo a atingir as conclusões que pretendia. De forma resumida, revelou saber usar a máquina com benefícios significativos para a sua aprendizagem. Mostrou estar a par de algumas opções válidas a usar na calculadora e soube tirar partido da máquina enquanto instrumento mediador da sua aprendizagem.

O Tomás

A professora do Tomás faz mais uso da calculadora gráfica. Percebe-se este facto, pela consulta feita ao longo do ano dos cadernos diários. Nesta fase do ano letivo, estudavam-se Assimptotas verticais e não verticais. Talvez por isso, o aluno depois de substituir x por $\frac{\pi}{2}$ e verificar que $A(\frac{\pi}{2})$ dava o resultado 4 sobre zero, afirmou de imediato "isto é porque é uma assimptota".

Na calculadora gráfica editou a expressão da função $A(x)$, contudo, fez-lhe confusão ver que o gráfico não lhe estava a apresentar assimptotas que estivessem de acordo com o que procurava. Através das definições encontrou uma nova janela (figura 4.63) que permitisse visualizar melhor o eixo dos yy e apenas a parte positiva do eixo dos xx, pois reparou no enunciado que x apenas tomava valores entre *0* e $\frac{\pi}{2}$.

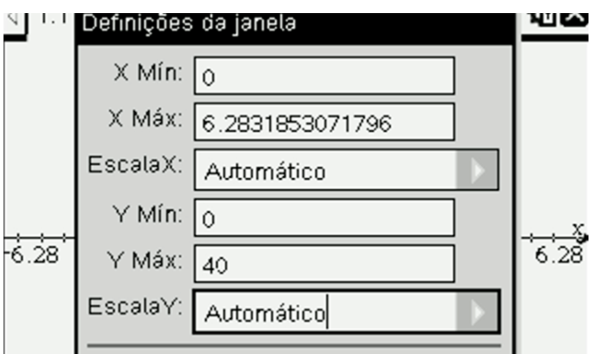


Figura 4.63 - Menu de definição de janela na tarefa 4

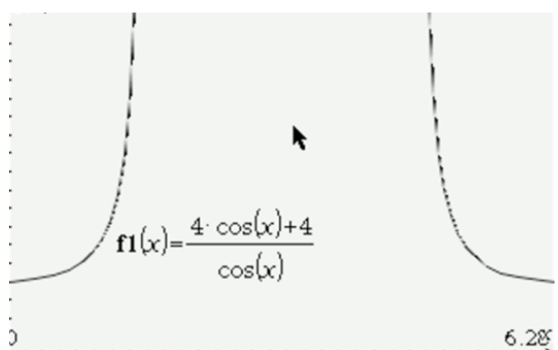


Figura 4.64 - Gráfico de *A(x)* na tarefa 4 - Tomás

Acedeu a *menu - janela - zoom - ampliar* e escolheu a parte do gráfico que lhe interessava (figura 4.64). Desta forma, verificou com naturalidade que o gráfico tinha uma assimptota vertical de equação

$x = \frac{\pi}{2}$

A interpretação geométrica do aluno foi "quando o x tende para $\frac{\pi}{2}$, a área da pirâmide tende para mais infinito".

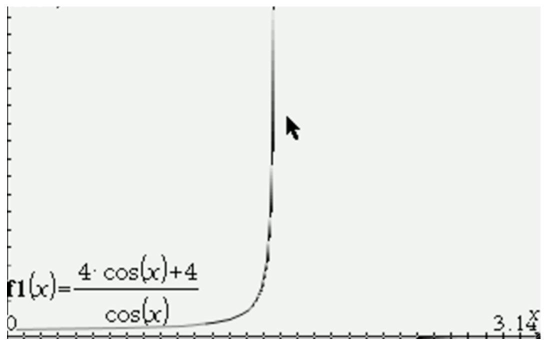


Figura 4.65 - Gráfico ampliado de *A(x)* da tarefa 4 -Tomás

O Tomás realizou uma correta interpretação dos registos de representação, mostrando estar à vontade em trabalhar num ambiente que exigisse múltiplas representações. Associou os conteúdos programáticos aos seus passos de resolução da tarefa a apresentou uma resposta final reveladora que tinha compreendido o exercício.

O aluno mostrou ter processos interiorizados de manusear a calculadora segundo o seu objetivo, sendo capaz de encontrar informações na máquina e sendo capaz de as atualizar conforme as suas necessidades. Adaptou a calculadora às suas vontades e esquemas mentais, revelando estar numa fase adiantada de instrumentação com a calculadora.

5. CONCLUSÕES

Para tentar responder às questões de investigação, estudou-se o processo da génese instrumental e a teoria inerente às representações semióticas como suporte explicativo dos processos desenvolvidos pelos alunos que participaram no estudo de caso.

Investigou-se o modo como os alunos utilizam as diferentes representações na resolução de tarefas e a forma como o processo de génese instrumental interfere no seu conhecimento e raciocínio. Procurou-se perceber quais os processos que os alunos utilizam na resolução de tarefas relacionadas com funções trigonométricas e qual o papel da calculadora gráfica na compreensão dos conceitos estudados. Com os dados recolhidos, tentou-se perceber na medida do possível, se o uso da calculadora é perspetivado de forma a desenvolver o conhecimento e o raciocínio dos alunos.

5.1. Considerações sobre os resultados

Analisando o percurso dos alunos no que concerne à sua capacidade em trabalhar em diferentes representações semióticas, pode-se considerar que todos revelaram progressos na capacidade de analisar situações matemáticas através de diferentes representações, sendo elas, orais, numéricas, algébricas ou gráficas. A Vera e o Tomás revelaram estarem mais aptos a converter diferentes representações de um mesmo objeto matemático. O Danilo mostrou estar mais limitado a sistemas de representação estáticos, não interpretando tão bem como os seus colegas a simbologia matemática num cariz mais dinâmico, através da calculadora.

No que refere à utilização da máquina gráfica, os alunos interiorizaram alguns esquemas instrumentais associados a procedimentos rotineiros de sala de aula, como escolher a janela de visualização, determinar extremos e pontos de interseção. Embora sejam mais evidentes estas destrezas no Tomás, também o Danilo e a Vera mostraram alguma evolução na interiorização de processos de resolução de tarefas com a calculadora. A professora do Tomás explorava mais estes processos, propondo mais problemas com abordagem de resolução gráfica. Apesar do Danilo e do Tomás usarem o mesmo livro de texto, os seus professores tinham uma indicação de exercícios significativamente diferente. Os professores do Danilo e da Vera não pareciam perspetivar o uso da máquina de forma a desenvolver um conhecimento que ajudasse a uma efetiva apropriação das potencialidades da calculadora gráfica. A resolução de tarefas adequadas é fundamental para os alunos criarem os esquemas mentais necessários para um real desenvolvimento de capacidades com o instrumento. Talvez, por esse facto, o Tomás revelasse estar mais avançado no seu processo de instrumentação. Através de uma didática adequada e contínua, o papel do professor pode ser essencial no processo da génese instrumental.

No primeiro período, os alunos não usavam com tanta frequência a máquina na sala de aula, e isso refletiu-se na dificuldade de resolução das primeiras tarefas. Contudo, recorde-se que os alunos já estavam num segundo ano de utilização da máquina gráfica, e parte deste trabalho devia ter sido realizado no 10º ano de escolaridade. A articulação entre os processos utilizados pelos professores e pelos alunos deve ajudar a estabelecer uma relação entre as resoluções gráficas e as resoluções analíticas, mas estas relações serão mais sólidas se acompanhadas continuamente desde o início.

Aquando da resolução das primeiras tarefas, os alunos apesar de já terem utilizado a máquina no 10º ano de escolaridade, encontravam-se praticamente no início de um processo de instrumentalização, pois não se recordavam da maior parte dos comandos trabalhados em situações de aprendizagem anteriores e revelavam poucas capacidades para integrar o artefacto-máquina na sua atividade. Dominavam apenas técnicas básicas. Posteriormente desenvolveram esquemas de utilização do instrumento razoavelmente estruturados e associados a esquemas mentais. No entanto, demonstravam pouca confiança nos seus esquemas, o que os levava a verificarem os resultados por outros processos. Procuravam outras representações. Paradoxalmente, isto pareceu ser em boa parte benéfico para as suas aprendizagens, pois o recurso a diferentes representações é um aspeto positivo e ao qual se deu relevância neste estudo. Autores como Friedlander e Tabach (2001) sustentam que o trabalho num ambiente de múltiplas representações permite que as desvantagens de cada uma possam ser suprimidas através da utilização combinada das várias representações. Deve-se por isso, fomentar a flexibilidade na escolha da representação e legitimar o seu uso através da colocação de questões investigativas e reflexivas que auxiliem os estudantes quanto à possibilidade de utilização das diferentes representações. O tema da trigonometria é vasto o suficiente para aplicar e potenciar estas ideias.

Os alunos pareciam estar habituados a que fosse sempre o professor a indicar qual a representação mais indicada para determinada tarefa. Frequentemente mudavam de um processo de resolução para outro, às vezes voltando novamente ao inicial. A articulação entre o trabalho da calculadora e o papel e lápis foi melhorando ao longo da investigação, à medida que os alunos lidavam mais facilmente com a calculadora e aperfeiçoavam os seus esquemas de compreensão algébrica.

Existem diversas maneiras de promover a resolução de problemas. Orientar os alunos de forma a paulatinamente serem capazes de escolher a representação que acham mais indicada pode ser uma boa opção pedagógica. Assim, os alunos tornam-se mais capazes de interpretar os símbolos matemáticos e a relação entre eles, uma vez que descobrem caminhos e estudam possibilidades, colocando a eles próprios questões investigativas que os podem ajudar a atingir os seus objetivos de compreensão de conteúdos. Os alunos utilizavam processos diferentes de resolução da mesma tarefa. Em alguns casos, chegaram a resolver as tarefas duas vezes de maneiras diferentes, não só numa tentativa de verificação, mas também na procura da representação que lhes parecesse oferecer maior credibilidade no resultado.

Inicialmente, sentiu-se um desconforto relativo à incerteza acerca dos valores apresentados pela máquina quando comparados com os valores que estavam acostumados a ver nos seus cálculos em papel, mas numa fase posterior procuraram a alternância de resoluções como confirmação dos seus raciocínios. De uma maneira geral, os alunos conseguiram variar e comparar diferentes representações. Mesmo quando não tinham necessidade de o fazer procuravam a mesma resposta nas diferentes representações. Corrobora-se assim as teorias de Duval (2003) que considerava indispensável para o funcionamento cognitivo e apreensão do objeto matemático, o uso de no mínimo dois registos de representação semiótica, salientando que os conceitos somente são assimilados quando o sujeito utilizar a conversão das diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Constatou-se que a calculadora contribuiu de forma mais ou menos direta e eficaz para a compreensão dos conceitos estudados, pois os alunos com a calculadora assimilaram conceitos que de forma apenas analítica não conseguiriam. Gradualmente, os alunos foram entendendo que podiam relacionar representações e que a máquina ia de encontro a resultados que lhes faziam sentido. Comparando as representações algébrica e gráfica, foram construindo os seus raciocínios e assimilando os conceitos inerentes às tarefas. A máquina foi bastante importante para os alunos realizarem com sucesso exercícios que implicavam determinar o contradomínio de funções, pontos de interseção e resolução de equações e inequações trigonométricas. Ao analisarem os gráficos na máquina, os alunos foram capazes de esclarecer dúvidas que haviam surgido durante a resolução em papel. A terceira tarefa foi reveladora deste facto, pois os alunos mostraram ter aperfeiçoado as suas capacidades de análise, interpretando corretamente os dados e percebendo que apenas conseguiriam resolver a tarefa com o auxílio da calculadora gráfica.

Na última tarefa, os alunos tiveram de trabalhar num nível cognitivo mais exigente, contudo acharam esta tarefa mais apelativa. Stein e Smith (1998) defendem que as tarefas apresentadas para estimular o pensamento dos alunos em níveis elevados de exigência cognitiva mudam drasticamente de natureza quando os alunos trabalham realmente sobre elas. Nesta fase, os alunos já dominavam outros conceitos e já se tinham recordado melhor dos conteúdos lecionados no 10º ano e do manuseamento da máquina.

Revelavam alguma falta de rigor matemático nos comentários que faziam, contudo estas representações verbais foram importantes para o investigador entender os seus raciocínios e para eles próprios entenderem melhor os passos das suas resoluções. Os alunos conseguiram imaginar espacialmente um sólido e a sua planificação, e relacionando os métodos analíticos e gráficos que haviam estudado, chegaram com algum entusiasmo às suas conclusões finais, o que é importante para que existam ganhos significativos nas suas aprendizagens.

5.2 Considerações Finais

Atualmente, a adaptação às novas tecnologias é um processo natural dos jovens estudantes. Os alunos lidam com tecnologias desde muito novos e como tal, não têm aparente dificuldade em manusear aparelhos tecnológicos como a calculadora gráfica. Os estudantes têm acesso a calculadoras em casa, no computador, no *tablet* ou mesmo no telemóvel a qualquer momento. Aceitam com naturalidade que se faça uso da calculadora gráfica. Por vezes, constata-se até o caso de os alunos estarem habituados a tecnologias mais avançadas e acharem o padrão da máquina algo rudimentar quando comparado com as potencialidades visuais e de interação de outras ferramentas computacionais. O professor deverá fazer ver que enquanto tecnologia digital, a calculadora gráfica é a ferramenta possível e mais indicada para o contexto escolar da sala de aula. Obviamente, a utilização da máquina deve ser pautada de bom senso e os professores não devem concentrar as suas atenções em abordagens só tecnológicas ou só algébricas. A ilustração das ligações entre as diferentes representações e os conceitos é sobejamente importante. Mesmo em estudantes do ensino secundário, e neste caso específico do 11º ano, caso os alunos não dominem o funcionamento da sua calculadora poderão ficar confusos com os resultados obtidos, cometendo erros de escrita graves e passarem a evitar o seu uso.

A proibição do uso de calculadora gráfica em anos anteriores, afeta de certa forma uma maior ou menor utilização da calculadora. O uso da calculadora é obviamente condicionado pela familiaridade que estes têm com a máquina. É natural que se estiverem habituados à sua presença se sintam mais confiantes no seu uso.

Em alguns casos, os alunos envolvidos neste estudo escolheram diferentes processos de utilização da máquina para resolver a mesma questão ou questões semelhantes, o que poderá ter a ver com o facto dos seus professores utilizarem de forma pouco regular a calculadora. Constata-se que, por vezes, os alunos até utilizam corretamente processos não familiares no contexto da aula.

A análise da qualidade da aprendizagem que os alunos adquirem com a calculadora gráfica é complexa. No entanto, foi possível constatar que o processo de génese instrumental vai-se desenvolvendo à medida que os alunos se vão familiarizando com a máquina. Consegue-se analisar a qualidade das suas aprendizagens pelo tipo de representação que apresentam, preferem ou relacionam. Não esquecendo a linguagem verbal, como se teve oportunidade de perceber durante a realização de cada tarefa, pois os alunos falando, parecem ter mais facilidade em construir pensamento, mesmo não havendo interação com o investigador. Comentários, exclamações ou questões revelaram serem importantes para conduzirem os passos das suas resoluções. É importante sentir estes sinais e explorá-los de forma conveniente. Os dados recolhidos vão de encontro com o que Friedlander e Tabach (2001) salientam relativamente à utilidade de experiências matemáticas oferecidas pelo uso de representações verbais, numéricas, gráficas e algébricas. Para estes autores a representação verbal, normalmente usada na colocação do problema e na interpretação final dos resultados obtidos, enfatiza a conexão entre a matemática e o quotidiano. De realçar que a postura dos alunos varia conforme a sua capacidade de comunicação no sistema de atividades coletivas em que se inserem. As suas interações são influenciadas pela comunidade escolar que integram e pelas regras de divisão de trabalho e normas socio-matemáticas.

A calculadora é uma ferramenta que ajuda a pensar e consequentemente pode contribuir para uma melhor aprendizagem. Em todas as tarefas, os alunos podem utilizar esquemas instrumentais e de compreensão algébrica. Deparando-se com novas situações, os alunos vão adaptando os esquemas instrumentais que já adquiriam. Este processo contribui para a consolidação de esquemas de compreensão e permite aos alunos identificarem melhor qual o modo de resolução mais adequado, pois compreendem melhor as tarefas que lhes são propostas.

Ao longo da investigação, os alunos foram melhorando a sua capacidade de articulação entre representações analíticas e gráficas, podendo-se concluir que este facto contribuiu para uma melhor compreensão das funções trigonométricas. Constatou-se que quando a tarefa é conduzida com um bom documento de apoio gráfico, o aluno vai melhorando o seu conhecimento matemático para além do esperado, desenvolvendo um sentimento de satisfação pessoal e confiança nas suas capacidades.

No que diz respeito à rapidez e eficiência na realização das tarefas propostas, os alunos ao utilizarem a calculadora de forma intermitente ou inconsequente demoram mais tempo a resolver os problemas, contudo, isto pode ajudar a refinar as técnicas e estratégias que utilizam, obrigando-os necessariamente a procurar esquemas de utilização da calculadora. Deste ponto de vista, a máquina tem assim um papel importante de ação sobre o sujeito, guiando-o para um determinado objetivo e consequentemente contribuindo para a construção do seu conhecimento.

Detetaram-se algumas limitações neste estudo, dado que a investigação está limitada a apenas alguns alunos que têm de realizar tarefas que vão de encontro ao que fazem na sala de aula. Com base nos resultados obtidos e na natureza deste estudo não é possível fazer uma generalização, no entanto este trabalho poderá ser um contributo de sugestões para investigações futuras sobre a integração das novas tecnologias na sala de aula, de modo a gerar entusiasmo e efetiva aprendizagem no aluno. O trabalho com a calculadora gráfica faz-se ao longo dos três anos do ensino secundário, e como tal, faria sentido continuar este estudo até ao final do ciclo, acompanhando os mesmos alunos.

Parece ser essencial desenvolver cada vez mais nos alunos um espírito crítico e de análise, para que de forma consciente consigam cada vez mais resolver problemas matemáticos num contexto quotidiano. O aluno de hoje não é um ser passivo que apenas assimila a informação exposta, pode ser um interveniente essencial que desenvolve aprendizagem e saberes matemáticos, se as tarefas e os recursos, como a calculadora, o proporcionarem.

Cabe ao professor harmonizar a atividade dos alunos com as tecnologias, de forma a estes desenvolverem competências, não só para a resolução de tarefas, mas sobretudo para desenvolverem de forma mais aprofundada uma compreensão conceptual que os leve a um pensamento crítico.

6. Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1987). Associação de professores de Matemática: Esperança e Desafio. *Educação e Matemática no1.*

Amigues, R. (2004) *Trabalho do professor e trabalho de ensino. O ensino como trabalho. Uma abordagem discursiva*. Londrina: Eduel.

Angeli, C., & Valanides N. (2009). *Epistemological and methodological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT–TPCK*: Advances in technological pedagogical content knowledge (TPCK). *Computers & Education, 52(1),*

APM. (1998). *Matemática 2001:Diagnóstico e recomendações para o ensino da Matemática. Lisboa: APM*

APM. (1988). *A renovação do currículo de Matemática. Lisboa: APM.*

APM. (1998). *Matemática 2001 – Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática. Lisboa: APM e IIE.*

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Boers, M., & Jones, P. (1994). *Is calculus made easier with the graphics calculator?.* In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom*. Adelaide: AAMT.

Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K., & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology at the secondary level:* TX: Texas Instruments. Consultado em Setembro de 2013, de Texas: http://education.ti.com

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação Matemática 115*

Damm, R. (1992) Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte. Strabourg: IREM

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). *Creating Meaning for and with the Graphing Calculator*. Educational Studies in Mathematics, 41, 143-163.

DES. (1997). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Ministério da Educação.

DES (2001). Programa de Matemática A – 10º ano. Lisboa: Ministério da Educação.

DES (2002). Programa de Matemática A – 11º ano. Lisboa: Ministério da Educação.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 1.

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif da lapensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives, v 5.*

Duval, R. (1996*) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?* RDM, v 16, n 3.

Duval, R. (2003) *Registos de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática.* São Paulo: Papirus.

Duval, R. *(2006).* Quelle semiotique pour l'analyse de la activité et dês productions mathématiques? *Revista Latino americana de Investigacion en Matemática Educativa, 9).*

Domingos, A. (2011). A utilização de materiais electrónicos e os manuais escolares. *Educação e Matemática nº11.*

Engeström, Y., Miettinen, R., Punamäki, R. (1999). *Perspectives on activity theory*. New York: Cambridge University Press.

Feinerman, R. e Ocken, S. (2002, Dezembro). Math in The City: A View from the College Classroom. *Education update online*. Consultado em Maio de 2014 em: http://educationupdate.com/archives/2002/dec02/issue/spot_mathincity.html.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In The roles of representation in school mathematics. Reston, VA: NCTM.

GAVE. (2011). Resultados dos exames nacionais por escola e por item. Lisboa: Ministério da Educação. Consultado em Setembro de 2013 em http://www.gave.min/edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Rel_Exames_2011.pdf

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). *Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco (Ed.), The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Graham, T., Headlam, C., Honey, S., Sharp, J., & Smith, A. (2003). The use of graphics calculators by students in an examination: what do they really do? *International Journal of Mathematical Education in Science and Techonology. 34(3), 319-334.*

Guillé,E.(1994). *O Homem entre o céu e a terra: uma nova abordagem da realidade*. Dinalivro.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Turning a Computational Device into a Mathemetical Instrument.* Boston: Springer.

Guzman, M. & Peréz D. (1993). *Ensenãnza de las ciencias y la matematica. Tendencias e innovaciones.* Editorial Popular.

Hoyles, C., &. Lagrange, J.B. (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. London: Springer.

Kenski, V. M. (2007) *Educação e Tecnologia. O novo ritmo da informação.* Campinas – SP: Papirus *5.ed*.

Kinard, J. T., & Kozulin, A. (Eds.). (2008*). Rigorous Mathematical Thinking: Conceptual Formation in the Mathematics Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kohl, M., (2003) Vygotsky : *Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico*, São Paulo: Scipione, 4ª edição

Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, V. S., & Miller, S. M. (2003). *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context (Learning in Doing: Social, Cognitive and Computational Perspectives).* Cambridge: Cambridge University Press.

Yin, R. (2001). *Estudo de caso, planejamento e métodos.* São Paulo: Bookman.

Mariotti M. A. (2008) *Influence of technologies advances on students' math learning.* Dipartimento di Matematica - Università di Pisa.

Mariotti, M. A., Bussi M. G. B. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*. Università di Modena e Reggio Emilia, Università di Siena.

Ministério da Educação. (1997). Programas de Matemática. Consultado em setembro de 2013 em http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/

Ministério da Educação. (2001). Programas Homologados de Matemática A. Consultado em Maio de 2013 em: http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/.

Ocken, S. & Feinerman, R. (2002). *Math in the city: a view from the College Classroom*. Education Update Consultado em Junho de 2013, em: http://educationupdate.com/.

Oliveira, M. (1993). *Vygotsky. Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico.* São Paulo: Scipione.

Ponte, J. P. e Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática*. Quadrante, 3(1).

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Rocha, H. (2002). *A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática*. Quadrante, XI (2), 3-28

Rocha, H. (2011). A calculadora gráfica e a utilização que dela fazemos. *Educação e Matemática nº112* , pp. 41,42.

Santaella, L. (1999) *O que é Semiótica.* São Paulo: Brasiliense.

Saraiva, M. J., & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento 19, pp. 74-83.* Itália: Palermo.

Silva, J. C., & Balsa, J. C. (2002). *Uma análise do papel da calculadora gráfica nos exames nacionais*. Em L. Menezes, H. Cunha e F. Tavares (Orgs.) Actas do XIII SIEM 2002 (pp. 237-242). Viseu: APM.

Schneuwly, B (2004) *Gêneros e tipos de discurso: considerações psicológicase ontogenéticas*. In: Schneuwly, B. & Dolz, J. In: Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras

Stein,M & Smith,M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação e Matemática* 105 , pp. 22-28

Vygostsky L.S. (1982) *Obras escogidas II*. Madrid: Visor

Waits, B. K., & Demana, F. (2000). *Calculators in mathematics teaching and learing: Past, present and future. In M. J. Burke & F. R. Curcio (Eds.), Learning mathematics for a new century*. Reston, VA: NCTM.

Waits, B., & Demana, F. (1994). *The Calculator and Computer Precalculus Project (C2PC): What have we learned in ten years?* Lanham, MD: University Press of America.

Wirthner, M. *(2004)* Les outils de l‟enseignant au service de la construction de l‟objet. *Actes du 9º colloque de l'AIRDF*

ANEXOS

ANEXO I

Autorização do Encarregado de Educação

Exmo. Encarregado de Educação

Do(a) aluno(a):____,

Com o objetivo de melhorar o ensino e a aprendizagem, vai ser desenvolvido um trabalho de investigação no centro de estudos. Pretende-se analisar o modo como os alunos utilizam a calculadora gráfica, na realização de tarefas sobre trigonometria.

Para tal, solicito a sua autorização para permitir a participação do seu educando, sendo observado o trabalho deste nalgumas sessões e podendo ser solicitado a realizar um conjunto de tarefas específicas relacionadas com os conteúdos ensinados.

Informa-se que os dados recolhidos para a investigação não servirão para avaliar o seu educando, e será preservado o anonimato do mesmo.

Note-se que o resultado deste estudo é fundamental para divulgar esta experiência e, assim, contribuir para uma melhoria do ensino da matemática.

Desde já os meus agradecimentos.

Com os melhores cumprimentos

Lisboa, ____de setembro de 2013

____

(João Gaspar Moreda de Sousa Mesquita - Professor de Matemática)

Declaro que autorizo a entrevista e a recolha de dados referentes às tarefas realizadas nalgumas aulas de Matemática pelo meu educando ___________________________, no âmbito de uma investigação sobre a utilização das calculadoras gráficas.

Data____/____/_____

ANEXO II

Tarefa 1.1

Considera as funções definidas por $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$, no intervalo de [0 , 2π]

a) Indica o conjunto dos zeros de cada uma das funções no intervalo dado

b) Determina as soluções da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo [π , 2π]

ANEXO III

Tarefa 1.2

Determine o contradomínio das funções:

a) $f(x) = 0{,}5 + sen(x)$

b) $g(x) = 1 + \cos^2(3x)$

Anexo IV

Tarefa 1.3

a) Determine entre que valores varia a função $f(x) = 2 + sen(\frac{x}{2})$

b) Resolve a equação $f(2x) - 2 = -\frac{1}{2}$ no intervalo [0, 2 π]

ANEXO V

Tarefa 2.1

Resove a inequação $sen(x) \geq -\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$

ANEXO VI

Tarefa 2.2

Encontra os valores de x $\in$ [0, 2π] para os quais $sen(x) \geq \frac{1}{2} \wedge \cos(x) \leq 0$

ANEXO VII

Tarefa 3

Considere a função f de domínio IR definida por $f(x) = 2x - \cos(x)$

Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma reta r, cuja inclinação é 45º, que contém o ponto A(-3,0) e que interseta o gráfico da função f no ponto B.

a) Determina a equação reduzida da reta r

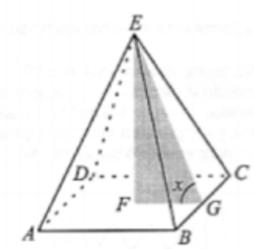
b) Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades

(adaptado - exame nacional 2000)

ANEXO VIII

Tarefa 4

Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular em que *x* designa a amplitude do ângulo FGE



A área total da pirâmide é dada em função de x por:

$$A(x) = \frac{4\cos(x) + 4}{\cos(x)} \qquad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Use a calculadora gráfica para resolver o seguinte problema: o que acontece a *A*(*x*) quando *x* se aproxima de $\frac{\pi}{2}$

Interprete geometricamente o valor obtido.

(adaptado - exame nacional 2001)